Facultad de Ciencias
UNAM

GEOMETRÍA MODERNA

Notas del curso Geometría Moderna 1

Unidad 4

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

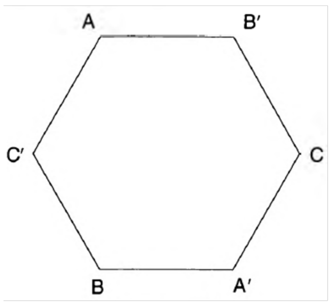
La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

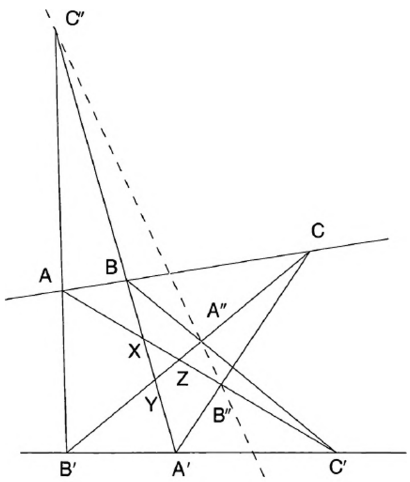
Índice general

Capítulo 1 Unidad 4. Principales Teoremas

1.1 Teorema de Pappus

Considere los vértices de un hexágono AB'CA'BC' ubicados alternativamente en dos líneas.





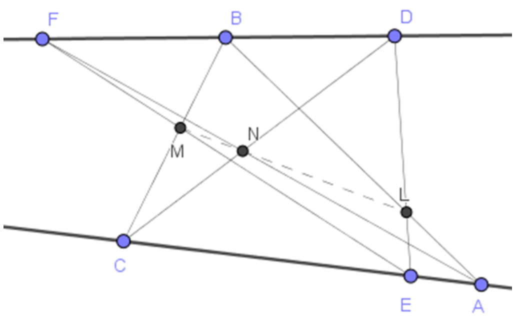
Supongamos que ahora dibujamos las líneas que estaban en los lados opuestos del hexágono para ubicar su punto de intersección. Encontramos que los tres puntos de intersección de estos pares de "lados opuestos" son colineales. Esta conclusión fue publicada por primera vez por Pappus de Alejandría en su Colección Matemática alrededor del año d.C. 300.
Con el fin de proporcionar una prueba, replantearemos el teorema de Pappus. Notarás una vez más que la prueba usa el teorema de Menelao repetidamente.

Teorema 1.1 (Teorema de Pappus)

Si F, B y D son tres puntos alineados y C, E y A también, entonces los puntos

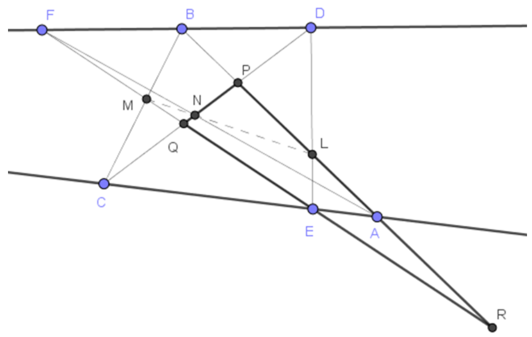
$$L = ED \cap AB, \quad M = CB \cap FE, \quad N = CD \cap FA$$

también estan alineados

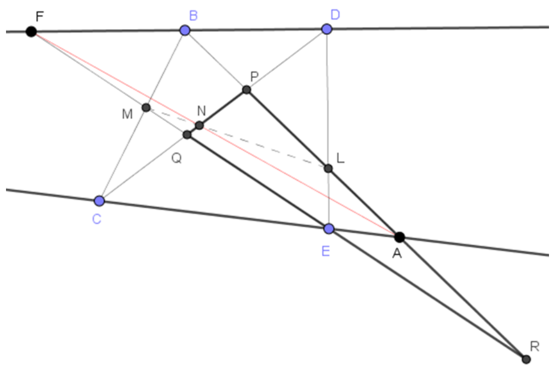


Demostración Consideremos el triángulo cuyos vértices son los puntos siguientes

$$P = BA \cap CD, \quad Q = CD \cap EF, \quad R = BA \cap FE$$



Ahora en el triángulo PQR aplicamos el Teorema de Menelao a los puntos F,N,A



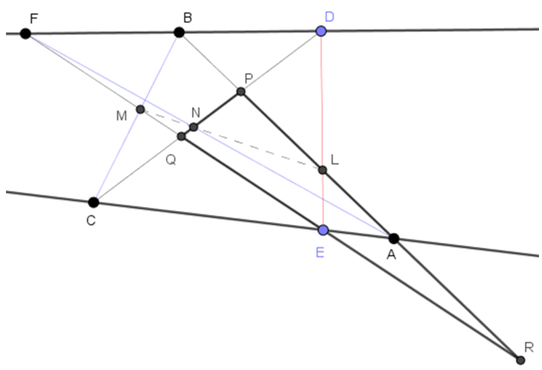
y obtenemos

$$\frac{RF}{FQ} \cdot \frac{PA}{AR} \cdot \frac{QN}{NP} = -1$$

que se puede escribir

$$\frac{QF}{FR} \cdot \frac{RA}{AP} \cdot \frac{PN}{NQ} = -1 \tag{1.1}$$

Ahora en el triángulo PQR aplicamos el Teorema de Menelao a los puntos D,L,E



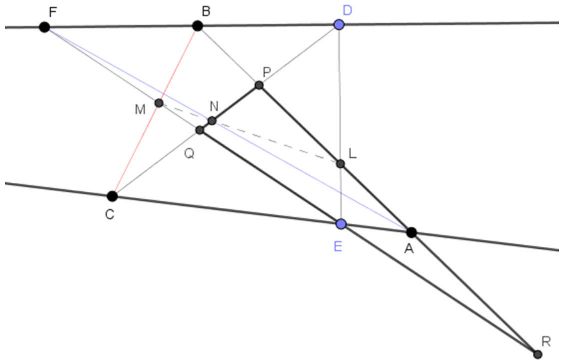
y obtenemos

$$\frac{RE}{EQ} \cdot \frac{QD}{DP} \cdot \frac{PL}{LR} = -1$$

que se puede escribir

$$\frac{QE}{ER} \cdot \frac{PD}{DQ} \cdot \frac{RL}{LP} = -1 \tag{1.2}$$

Ahora en el triángulo PQR aplicamos el Teorema de Menelao a los puntos B,M,C



y obtenemos

$$\frac{RB}{BP} \cdot \frac{PC}{CQ} \cdot \frac{QM}{MR} = -1 \tag{1.3}$$

Multiplicando $(1{,}1)$, $(1{,}2)$ y $(1{,}3)$ tenemos

$$\left(\frac{QF}{FR} \cdot \frac{RA}{AP} \cdot \frac{PN}{NQ}\right)\left(\frac{QE}{ER} \cdot \frac{PD}{DQ} \cdot \frac{RL}{LP}\right)\left(\frac{RB}{BP} \cdot \frac{PC}{CQ} \cdot \frac{QM}{MR}\right) = -1$$

Reacomodando términos

$$\left(\frac{QM}{MR} \cdot \frac{RL}{LP} \cdot \frac{PN}{NQ}\right)\left(\frac{QF}{FR} \cdot \frac{RB}{BP} \cdot \frac{PD}{DQ}\right)\left(\frac{QE}{ER} \cdot \frac{RA}{AP} \cdot \frac{PC}{CQ}\right) = -1 \tag{1.4}$$

En el triángulo $\triangle PQR$ los puntos F,B,D estan alineados, entonces

$$\left(\frac{QF}{FR} \cdot \frac{RB}{BP} \cdot \frac{PD}{DQ}\right) = -1$$

En el triángulo $\triangle PQR$ los puntos E,A,C también estan alineados

$$\left(\frac{QE}{ER} \cdot \frac{RA}{AP} \cdot \frac{PC}{CQ}\right) = -1$$

por tanto en $(1{,}4)$ obtenemos

$$\frac{QM}{MR} \cdot \frac{RL}{LP} \cdot \frac{PN}{NQ} = -1$$

esto quiere decir que los puntos N,M,L estan alineados según el teorema de Menelao. ■