Facultad de Ciencias UNAM

GEOMETRÍA MODERNA

Notas del curso Geometría Moderna 1

Unidad 4

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

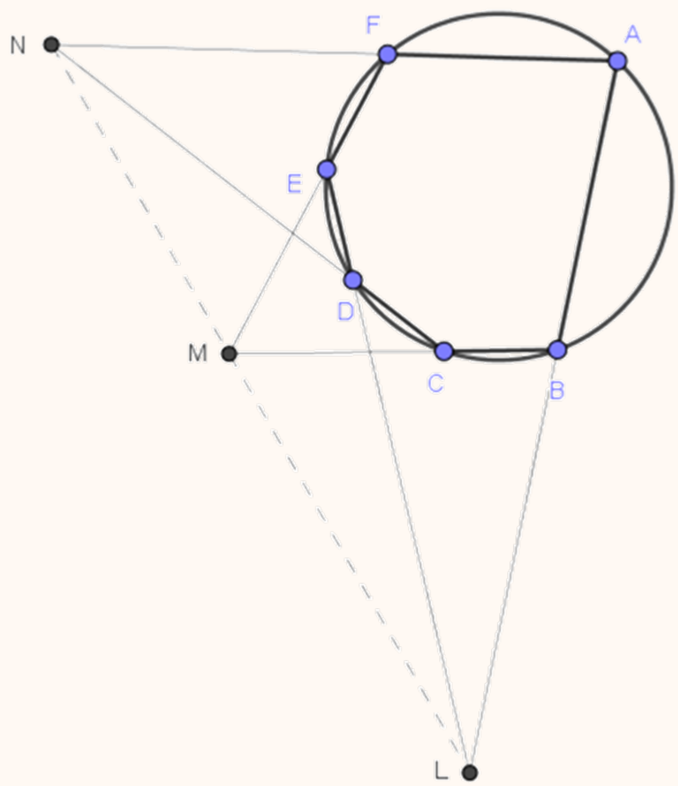
Capítulo 1 Unidad 4. Principales Teoremas

1.1 Teorema de Pascal.

Blaise Pascal (1623-1662), un contemporáneo de Desargues, es considerado hoy como uno de los verdaderos genios en la historia de las matemáticas. Aunque las excentricidades le impidieron alcanzar su verdadero potencial, se le considera uno de los creadores del estudio formalizado de la probabilidad (una consecuencia de sus correspondencias con Fermat), e hizo muchas contribuciones importantes a otras ramas de las matemáticas. Nos ocupamos aquí de una de sus contribuciones a la geometría. En 1640, a la edad de dieciséis años, Pascal publicó un artículo de una página titulado Essay pour les coniques. Contenía un teorema que Pascal denominó misterium hexagrammicum. El trabajo impresionó mucho a Descartes, que no podía creer que fuera el trabajo de un niño. Este teorema establece que las intersecciones de los lados opuestos de un hexágono inscrito en una sección cónica son colineales. Para nuestros propósitos, consideraremos solo el caso en el que la sección cónica es un círculo y el hexágono no tiene un par de lados opuestos paralelos.

Teorema 1.1 (Teorema de Pascal)

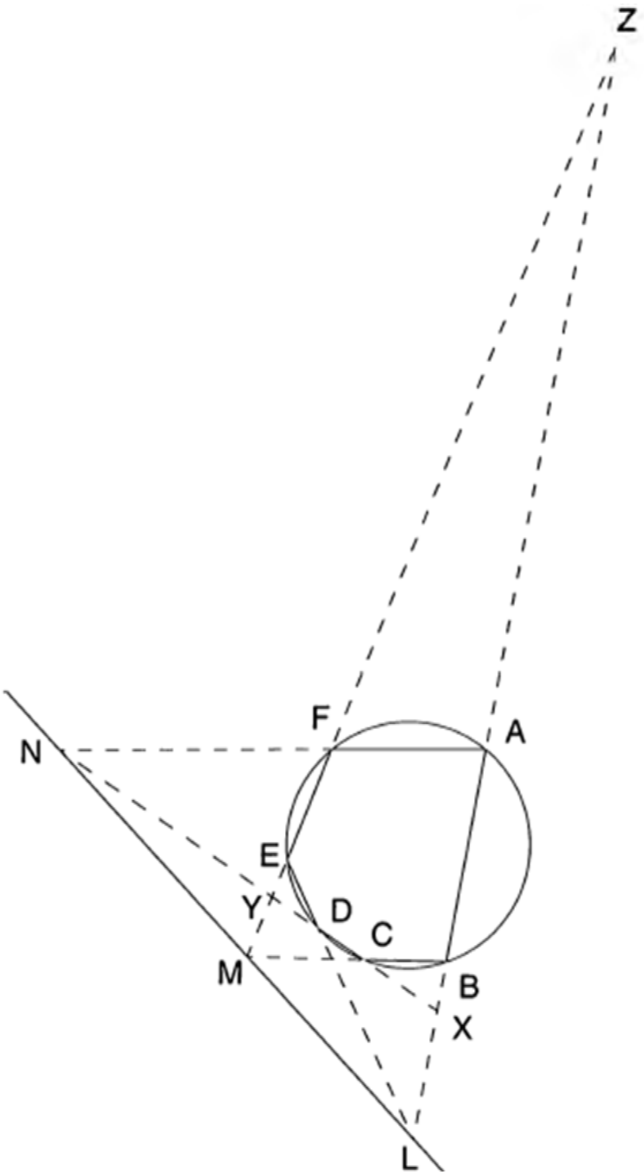
Si un hexágono sin par de lados opuestos paralelos se inscribe en un círculo, entonces las intersecciones de los lados opuestos son colineales.



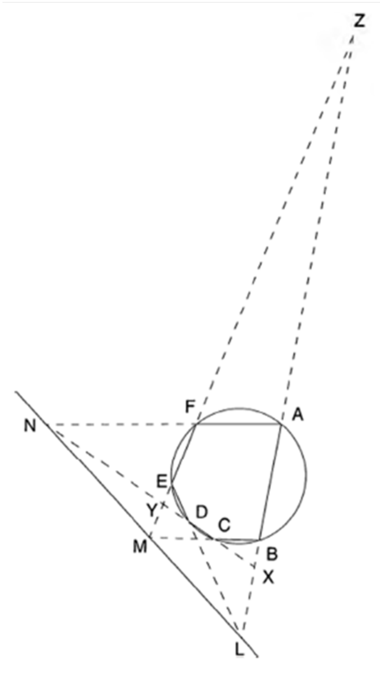
♡

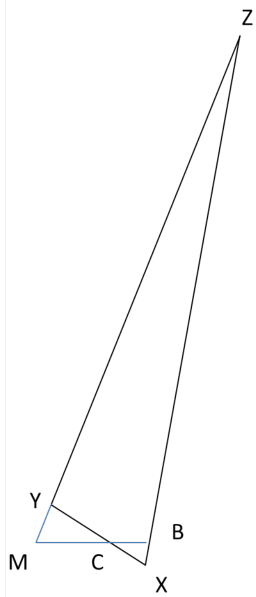
Demostración En la figura, el hexagono ABCDEF esta inscrito en una circunferencia, para la prueba consideramos el triángulo $\triangle XYZ$ donde

$$Y = EF \cap DC, \ X = AB \cap DC, \ Z = EF \cap AB$$



En el triángulo $\triangle XYZ$ considerando el punto B sobre el lado ZX, el punto M sobre el lado ZY y el punto C sobre el lado YX.





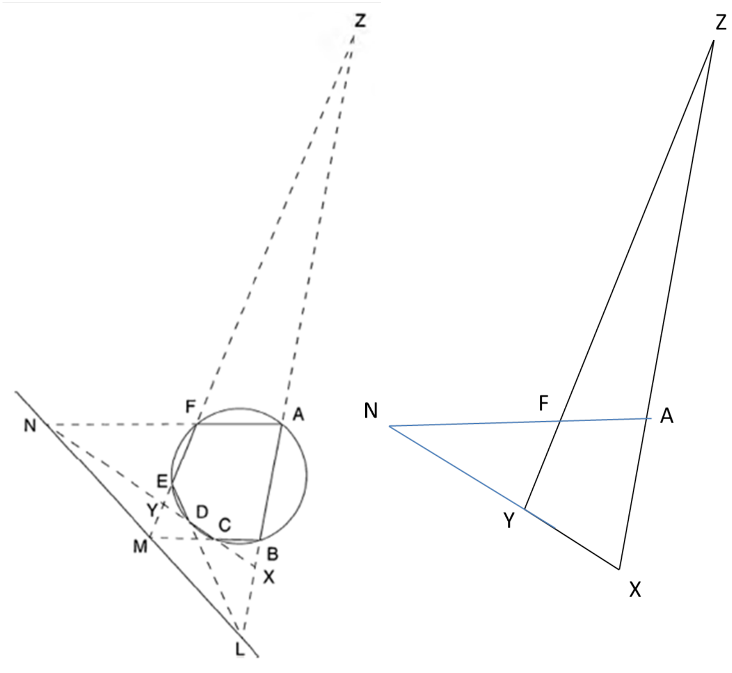
Luego, por el teorema de Menelao:

$$\frac{XB}{BZ} \cdot \frac{ZM}{MY} \cdot \frac{YC}{CX} = -1$$

esta expresión se puede escribir

$$\frac{ZB}{BX} \cdot \frac{XC}{CY} \cdot \frac{YM}{MZ} = -1 \tag{1.1}$$

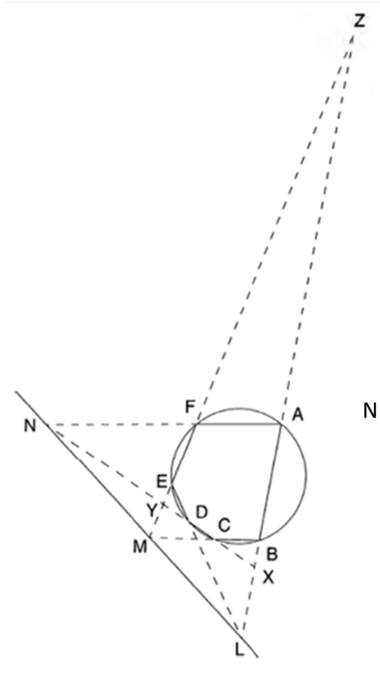
En el triángulo $\triangle XYZ$ considerando el punto A sobre el lado ZX, el punto F sobre el lado ZY y el punto N sobre el lado YX.

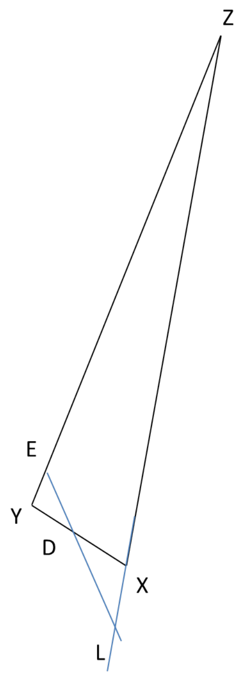


Luego, por el teorema de Menelao:

$$\frac{ZA}{AX} \cdot \frac{YF}{FZ} \cdot \frac{XN}{NY} = -1 \tag{1.2}$$

En el triángulo $\triangle XYZ$ considerando el punto L sobre el lado ZX, el punto E sobre el lado ZY y el punto D sobre el lado YX.





Luego, por el teorema de Menelao:

$$\frac{XD}{DY} \cdot \frac{YE}{EZ} \cdot \frac{ZL}{LX} = -1 \tag{1.3}$$

Multiplicando (1,1), (1,2) y (1,3)

$$\left(\frac{ZB}{BX} \cdot \frac{XC}{CY} \cdot \frac{YM}{MZ}\right)\left(\frac{ZA}{AX} \cdot \frac{XF}{FZ} \cdot \frac{XN}{NY}\right)\left(\frac{XD}{DY} \cdot \frac{YE}{EZ} \cdot \frac{ZL}{LX}\right) = -1 \tag{1.4}$$

Cuando dos segmentos secantes se dibujan en un círculo desde un punto externo, el producto de las longitudes de una secante y su segmento externo es igual al producto de las longitudes de la otra secante y su segmento externo (Potencia).

Por tanto

a) Para las cuerdas secantes FE y AB se tiene

$$ZA \cdot ZB = ZF \cdot ZE$$

b) Para las cuerdas secantes DC y AB se tiene

$$XC \cdot XD = XB \cdot XA$$

c) Para las cuerdas secantes FE y DC se tiene

$$YE \cdot YF = YD \cdot YC$$

Según lo anterior

$$\frac{(ZB)(ZA)}{(EZ)(FZ)} = 1$$
$$\frac{(XD)(XC)}{(AX)(BX)} = 1$$
$$\frac{(YE)(YF)}{(DY)(CY)} = 1$$

Por lo que (1,4) nos queda

$$\frac{YM}{MZ} \cdot \frac{XN}{NY} \cdot \frac{ZL}{LX} = -1$$

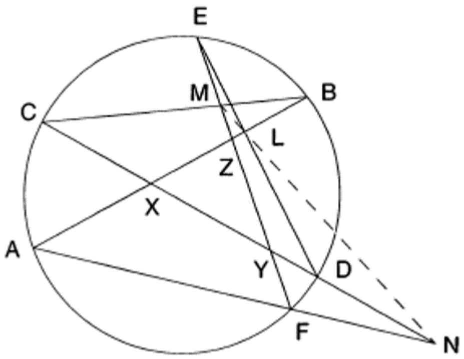
Por lo tanto, según el teorema de Menelao, los puntos M, N y L deben ser colineales. ■

Es interesante notar que el teorema de Pascal se puede extender de la siguiente manera.

Teorema 1.2 (variación del teorema de Pascal)

Si un hexágono tiene sus vértices en un círculo en cualquier orden, entonces las intersecciones (si existen) de los lados opuestos son colineales. ♡

Demostración Como ejemplo de esta variación, se puede seguir la demostración del Teorema anterior utilizando el diagrama de la Figura.



Solo se necesita hacer un ajuste menor, y esa es la razón de las ecuaciones.

a) Para las cuerdas secantes FE y AB se tiene

$$ZA \cdot ZB = ZF \cdot ZE$$

b) Para las cuerdas secantes DC y AB se tiene

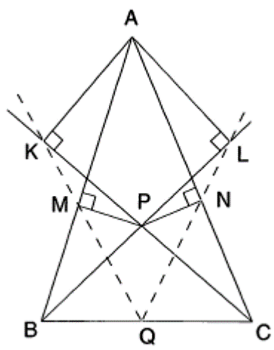
$$XC \cdot XD = XB \cdot XA$$

c) Para las cuerdas secantes FE y DC se tiene

$$YE \cdot YF = YD \cdot YC$$

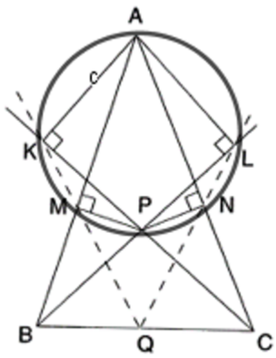
Tenga en cuenta que aquí se utilizan los mismos pares de *lados opuestos* que se utilizaron anteriormente. ■

Ejemplo 1.1 El punto P es cualquier punto en el interior del triángulo $\triangle ABC$. Los puntos M y N son los pies de las perpendiculares del punto P al AB y AC, respectivamente. $AK \perp CP$ en el punto K y $AL \perp BP$ en el punto L (consulte la Figura).



Demuestre que KM, LN y BC son concurrentes.

Solución *Podemos demostrar fácilmente que algunos puntos A, K, M,P, N y L se encuentran en el círculo con diámetro AP. Podemos justificar esto dándonos cuenta de que los ángulos rectos AKP y AMP están inscritos en el mismo semicírculo, como es el caso de los ángulos rectos ALP y ANP.*



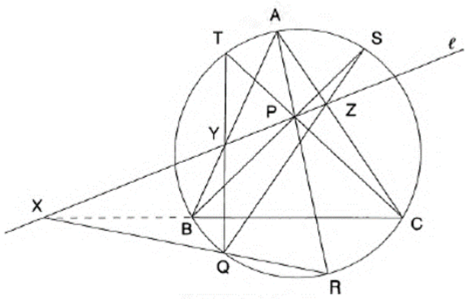
Usando la variación del teorema de Pascal, notamos que para el hexágono inscrito AKMPNL, los pares de lados se cruzan de la siguiente manera:

$$AM \cap LP = B, \quad AN \cap KP = C, \quad KM \cap LN = Q$$

Según el teorema de Pascal, los puntos B, C y Q son colineales, es decir, KM y LN BC son concurrentes. ■

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Seleccione cualquier punto P dentro del triángulo $\triangle AAB$ y una línea ℓ que contenga P y que intersecte a los lados BC, AB y AC en los puntos X, Y, y Z, respectivamente. Sean AP, BP y CP cuyas intersecciones con el circuncírculo del triángulo $\triangle ABC$ en los puntos R,S y X respectivamente.



Demuestre que RX, SZ y TY son concurrentes.