Facultad de Ciencias UNAM

GEOMETRÍA MODERNA

Notas del curso Geometría Moderna 1

Unidad 1

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 1. Geometría del triángulo

1.1 Teorema de Thales

Área de un polígono

Asociaremos con cada polígono simple un número no negativo llamado su **área**, y asumiremos que el **área** tiene ciertas propiedades razonables.
Postulados para áreas poligonales:

I) A cada polígono simple se le asocia un número no negativo llamado su área.
II) Propiedad de invarianza: Los polígonos congruentes tienen el mismo área.
III) Propiedad de aditividad: El área de unión de un número finito de polígonos que no se superponen es la suma de las áreas de los polígonos individuales.
IV) Área rectangular: El área de un rectángulo de lados a,b es ab.

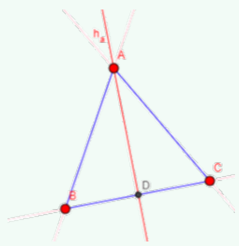
Las propiedades (ii) y (iii) ciertamente se ajustan a nuestras nociones preconcebidas sobre el área. Esperamos que las figuras tengan la misma área si tienen la misma forma y tamaño, y también esperamos poder encontrar el área de una forma grande sumando las áreas de las piezas individuales que componen la forma.

Área de un triángulo

Para definir el área de un triángulo necesitamos definir su altura.

Definición 1.1 (Altura de triángulo)

La altura de un triángulo $\triangle ABC$ desde el vértice A es la perpendicular al lado opuesto BC que pasa por A y la denotamos por h_a.
Al punto de intesección D, de la altura con el lado BC le llamamos pie de la altura.
La longitud de la altura que pasa por A para el triángulo $\triangle ABC$ es la longitud del segmento AD.
De manera análoga definimos h_b y h_c las alturas del triángulo por los vértices B y C, respectivamente.

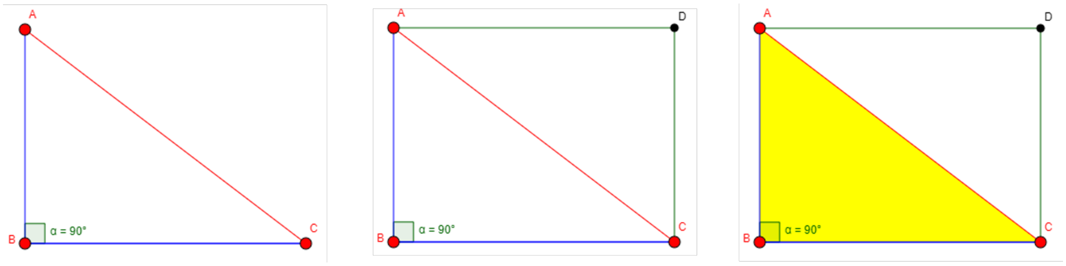


Denotamos el área del triángulo ABC por (ABC). ♣

Proposición 1.1 (Área de un triángulo rectángulo)

El área de un triángulo rectángulo es la mitad del producto de sus catetos. ♠

Demostración A partir del triángulo rectángulo $\triangle ABC$ construimos el rectángulo $\square ABCD$, al trazar DC la paralela a AB y DA la paralela a BC

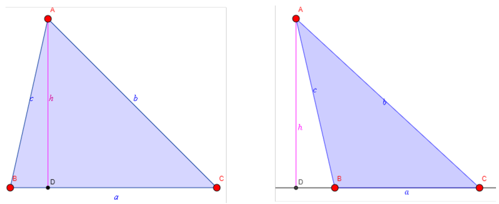


Tenemos que los triángulos $\triangle\, CDA$ y $\triangle\, ABC$ son congruentes. El área del rectángulo es el producto de sus lados $AB \times BC$.
Por lo tanto el área del triángulo rectángulo $\triangle\, ABC$ es $(ABC) = \dfrac{AB \times BC}{2}$ ■

Proposición 1.2 (Área de un triángulo)

El área de cualquier triángulo es la mitad del producto de cualquiera de sus bases por la altura correspondiente sobre la base considerada. ♠

Demostración Sea $\triangle\, ABC$ un triángulo cualquiera. Sea AD la altura desde el vértice A.
Supongamos que los lados del triángulo tienen longitudes a,b y c y que la altura AD tiene longitud h. Existen dos posibilidades para el pie de altura D: que D esté dentro del segmento BC o que D esté en la prolongación de BC. Trataremos el primero.



Hagamos $BD = a_1$ y $DC = a_2$ entonces $a = a_1 + a_2$ por lo que

$$(ABC) = (ABD) + (ADC) = \frac{a_1 h}{2} + \frac{a_2 h}{2} = \frac{(a_1 + a_2)h}{2} = \frac{ah}{2}$$

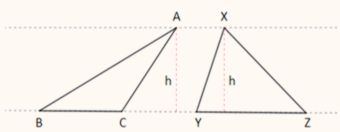
Si D está fuera del segmento BC. Supongamos que B está entre D y C y hacemos $BD = a_1$. Tenemos formado un triángulo rectángulo $\triangle\, ABD$ de base $BD = a_1$ y altura h.
Hagamos $DC = a_2$. Tenemos formado un triángulo rectángulo $\triangle\, ADC$ de base $DC = a_2$ y altura$h$. Por lo tanto $a = a_2 - a_1$ por lo que

$$(ABC) = (ADC) - (ADB) = \frac{a_2 h}{2} - \frac{a_1 h}{2} = \frac{(a_2 - a_2)h}{2} = \frac{ah}{2}$$

■

Lema 1.1 (Proporción: Áreas y Bases de un Triángulo)

Si dos triángulos tienen la misma altura entonces sus áreas estan en la misma proporción que sus bases



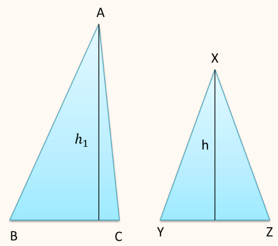
♡

Demostración En este caso se tiene

$$\frac{\text{área} \triangle\, ABC}{\text{área} \triangle\, XYZ} = \frac{(ABC)}{(XYZ)} = \frac{\frac{BC \cdot h}{2}}{\frac{XZ \cdot h}{2}} = \frac{BC}{YZ}$$ ■

Lema 1.2 (Proporción: Áreas y Alturas de un Triángulo)

Si dos triángulos tienen la misma base entonces sus áreas estan en la misma proporción que sus alturas



♡

Demostración En este caso se tiene

$$\frac{\acute{a}rea \triangle ABC}{\acute{a}rea \triangle XYZ} = \frac{(ABC)}{(XYZ)} = \frac{\frac{BC \cdot h_1}{2}}{\frac{YZ \cdot h}{2}} = \frac{h_1}{h} \quad \blacksquare$$

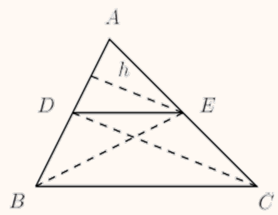
Teorema de Tales

Existen dos teoremas relacionados con la geometría clásica que reciben el nombre de teorema de Tales, ambos atribuidos al matemático griego Tales de Mileto en el siglo VI a. C.

Teorema 1.1 (Teorema de Tales)

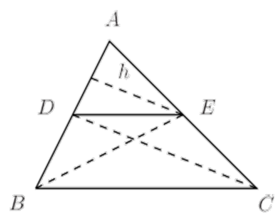
En un triángulo $\triangle ABC$, sean D y E puntos de AB y AC respectivamente, tales que DE es paralela a BC. Entonces

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$



♡

Demostración Si trazamos BE y DC considerando el triángulo ABC, con sus lados AB y AC cortado por la DE paralela al lado BC.



Tenemos entonces que los triángulos

$$\triangle ABE$$

$$\triangle ADE$$

tienen la misma altura desde el vértice E, por tanto la razón de sus bases es igual a la razón de sus áreas, así

$$\frac{AB}{AD} = \frac{A(\triangle\, ABE)}{A(\triangle\, ADE)}$$

Análogamente, al considerar los triángulos $\triangle\, ADC$ y $\triangle\, ADE$, tenemos

$$\frac{AC}{AE} = \frac{A(\triangle\, ADC)}{A(\triangle\, ADE)}$$

Observamos que los triángulos $\triangle\, DEB$ y $\triangle\, DEC$ tienen DE como base común; y como DE y BC son paralelos, las respectivas alturas sobre esta base miden lo mismo,luego: $A(DBE) = A(DCE)$. Por lo tanto, $A(ABE) = A(ADE) + A(DBE) = A(ADE) + A(DCE) = A(ADC)$. Esta identidad junto con la anterior nos lleva a que:

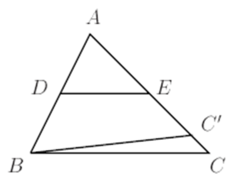
$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \blacksquare$$

Teorema 1.2

Si en el triángulo ABC tenemos puntos D y E sobre los lados AB y AC respectivamente tales que $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ *entonces DE es paralela a BC*

Demostración Supongamos que DE no es paralela a BC. Sea BC' la recta que pasa por B paralela a DE y supongamos que intersecta a AC en C'. Por el teorema anterior tenemos que

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC'}{AE}$$



Como la hipótesis

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

tenemos que

$$\frac{AC'}{AE} = \frac{AC}{AE}$$

Por lo tanto, $AC' = AC$ y entonces $C' = C$. Observamos que la relación

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

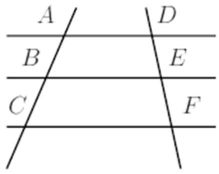
del teorema anterior es equivelente a

$$\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$$

Esto es, si tenemos dos rectas paralelas, la proporción que hay entre las rectas transversales que las cortan se conserva, sin importar quienes son estas rectas transversales. $\blacksquare$

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Consideremos tres rectas y dos rectas transversales a éstas como se ve en la figura



Tenemos que si AD, BE y CF son paralelas entonces $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$