Facultad de Ciencias UNAM

GEOMETRÍA MODERNA

Notas del curso Geometría Moderna 1

Unidad 3

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

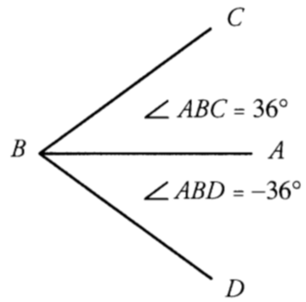
La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 3. Introducción a la geometría moderna

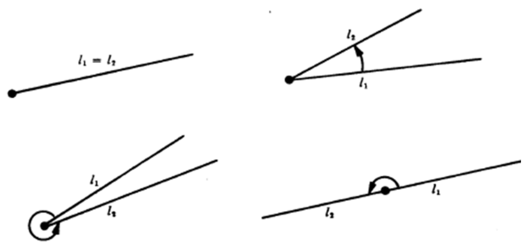
1.1 Ángulos dirigidos

Los ángulos dirigidos u orientados (junto con los segmentos orientados) son introducidos en la geometría por el gran matemático francés Michel Chasles, a mediados del siglo XIX. Los ángulos que se miden en el sentido contrario a las agujas del reloj se consideran positivos, mientras que los que se miden en el sentido de las agujas del reloj son negativos, como se muestra en la figura siguiente.



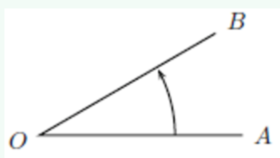
1.1.1 Ángulos dirigidos entre rayos

Para un ángulo dirigido, el símbolo $\angle ABC$ se interpreta como el ángulo del rayo $\overrightarrow{BA}$ al rayo $\overrightarrow{BC}$. Igual que en los segmentos hay ocasiones en que es muy útil dar a un ángulo una dirección. Contrario al caso de las rectas podemos escoger una dirección que es común para todos los angulos. Usualmente se usa el sentido contrario al de las manecillas del reloj como el sentido positivo.



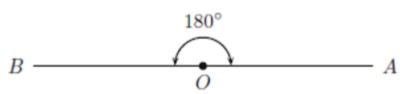
Definición 1.1 (Ángulo dirigido entre rayos)

El ángulo con el vértice O consiste en el punto O junto con dos rayos $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ (los lados del ángulo). Denotamos un ángulo con vértice O y lado $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ por $\angle\, AOB$.



♣

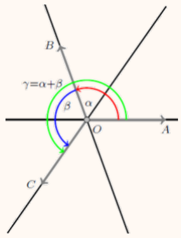
Ejemplo 1.1 Si $\angle\, AOB$ es tal que $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son líneas opuestas (es decir, tal que A, O y B estén en la misma línea, con $O \in AB$) entonces $\angle\, AOB = 180$.



Teorema 1.1 (Chasles)

Dadas tres rayos orientados $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, tenemos

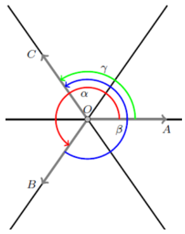
$$\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC$$



Demostración Tomaremos un eje OX y lo giraremos, en sentido positivo, alrededor O, partiendo de $\overrightarrow{OA}$, de manera que coincida, sucesivamente, por primera vez, con $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ (prestando atención, por supuesto, a que en cada coincidencia, el eje OX tiene que coincidir con la línea orientada actual tanto en dirección y sentido). Denotemos las principales medidas de los ángulos dirigidos $\angle AOB$, $\angle BOC$. $\angle AOC$ por α, β, γ, respectivamente, tenemos

$$\gamma = \alpha + \beta$$

Mientras que en el segundo caso (cuando $\overrightarrow{OC}$ está entre $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, en el sentido contrario a las agujas del reloj)



tenemos

$$\gamma = \alpha + \beta + 2\pi$$

■

Teorema 1.2

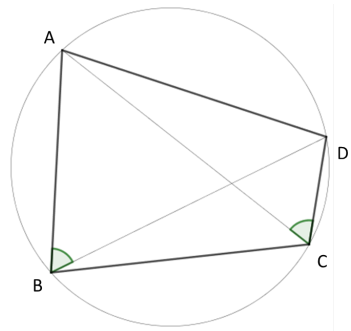
Dados cuatro puntos A, B, C y D se tiene que, son concíclico si y sólo si

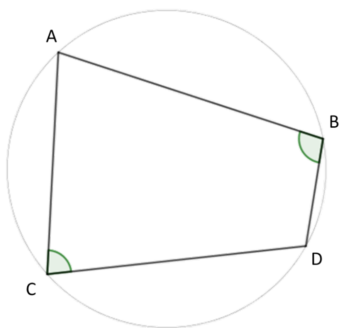
$$\angle ABD = \angle ACD$$

Supongamos que los cuatro puntos son concíclicos entonces se puede formar un cuadrilátero con los cuatro puntos y tenemos dos casos

a) Si B y C son paralelos al lado de AD

$$\angle ACD = \angle ABD$$

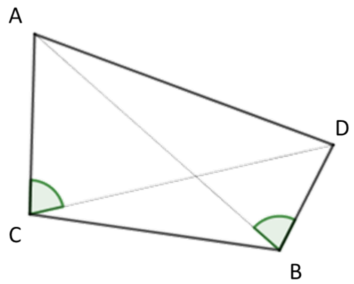




b) Si los puntos B y C están en lados opuestos de AD

$$\begin{aligned}
\angle\, ACD + \angle\, DBA &= 180 \\
\angle\, ACD &= 180 - \angle\, DBA \\
\angle\, ACD &= -\angle\, DBA \\
\angle\, ACD &= \angle\, ABD
\end{aligned}$$

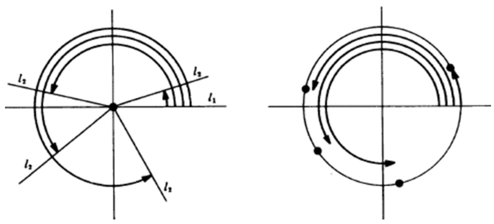
Recíprocamente si dados cuatro puntos A, B, C y D tal que $\angle\, ACD = \angle\, ABD$. Podemos formar el cuadrilátero ABCD



y tenemos que Como el ángulo entre el lado AC y una diagonal es igual al ángulo entre el lado opuesto DB y la otra diagonal, entonces el cuadrilátero es cíclico

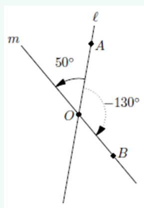
1.1.2 Ángulos dirigidos entre rectas

En este caso denotamos el ángulo entre las rectas ℓ_1 y ℓ_2 por $\angle\, \ell_1, \ell_2$ y lo llamaremos ángulo dirigido; y es el ángulo positivo que ℓ_1 tiene que girar para coincidir con ℓ_2.



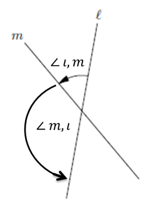
Definición 1.2 (Ángulos dirigidos entre rectas)

Si ℓ y m son dos rectas que se cruzan en O, entonces $\angle\, \ell, m = \angle\, AOB$ para cualquier punto A en ℓ y B en m.



♣

Comentario Dadas dos rectas ℓ, m al realizar un giro de la recta ℓ en un ángulo, tal que dicha recta regresa a su posición original, nos permite interpretar lo anterior como $\angle\, \ell, m + \angle\, m, \ell = 0$.



esto es equivalente a $\boxed{\angle\,\ell, m = -\angle\,m, \ell}$

Diremos que dos ángulos dirigidos son equivalentes si difieren por un multiplo de 180

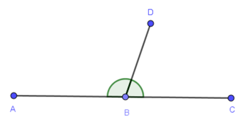
Teorema 1.3 (Propiedad de puntos colineales)

Dados tres puntos A,B y C están alineados si y sólo si para cualquier otro punto D se tiene

$$\angle\,ABD = \angle\,CBD$$

♡

Demostración



Según la figura $\angle\,CBD + \angle\,DBA = \angle\,CBA$
Esto se puede escribir

$$\angle\,CBD + \angle\,DBA = 0$$

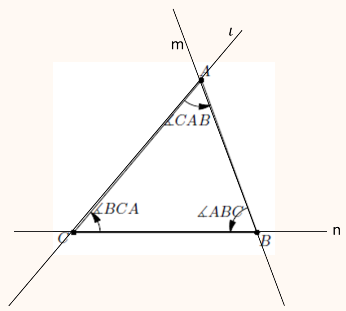
por lo que

$$\angle\,CBD = -\angle\,DBA \Rightarrow \angle\,CBD = \angle\,ABD$$

■

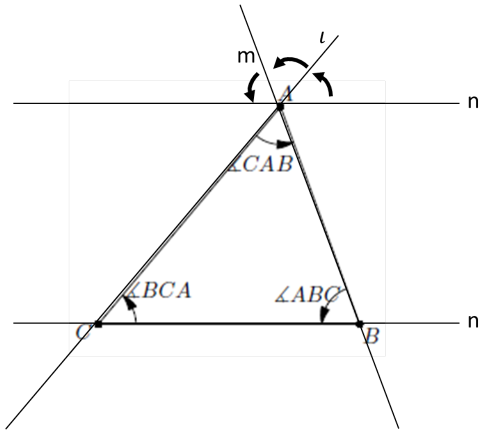
Teorema 1.4 (La suma de los ángulos internos de un triángulo suman 180)

Para cualquiera líneas ℓ, m, n tenemos $\angle\,\ell, m + \angle\,m, n + \angle\,n, \ell = 180$. En particular, para los puntos A, B, C tenemos $\angle\,ABC + \angle\,BCA + \angle\,CAB = 180$.



♡

Demostración Se comprueba de la figura



Esto lo podemos escribir $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 0$. ■

Teorema 1.5 (Criterio de paralelismo entre rectas)

Sean D_1 y D_2 dos rectas en el plano. Entonces D_1 es paralelo a D_2 si y sólo si para cualquier secante D tenemos $\angle D_1, D = \angle D_2, D$. o equivalentemente $\angle D, D_1 = \angle D, D_2$

♡

Demostración Supongamos que $D_1 \parallel D_2$. Con esta suposición se tiene $\angle D_1, D_2 = 0$. Por otro lado

$$0 = \angle D_1, D_2 = \angle D_1, D + \angle D, D_2 = \angle D_1, D - \angle D_2, D$$

por lo tanto

$$\angle D_1, D = \angle D_2, D$$

Suponiendo ahora $\angle D_1, D = \angle D_2, D$, por lo que $\angle D_1, D = -\angle D, D_2$, de donde $\angle D_1, D + \angle D, D_2 = 0$. Pero $\angle D_1, D + \angle D, D_2 = \angle D_1, D_2$. De manera que $\angle D_1, D_2 = 0$ es decir $D_1 \parallel D_2$. ■

Teorema 1.6 (Criterio de perpendicularidad entre rectas)

Dadas dos rectas concurrentes D_1, D_2, son perpendiculares sí y sólo si

$$\angle D_1, D_2 = \angle D_2, D_1$$

♡

Demostración Claramente, si las dos líneas son perpendiculares, los dos ángulos son iguales. Por el contrario, si

$$\angle D_1, D_2 = \angle D_2, D_1$$

entonces tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \angle D_1, D_2 - \angle D_2, D_1 = 0 \\ \angle D_1, D_2 + \angle D_2, D_1 = 0 \end{cases}$$

Si sumamos las dos ecuaciones, obtenemos $2\angle D_1, D_2 = 0$. Necesitamos recordar, nuevamente, que todas las igualdades deben entenderse mod π. Como tal, $2\angle D_1, \angle D_2 = 0$ no significa necesariamente que $2\angle D_1, \angle D_2 = 0$. En este caso particular, el ángulo no puede ser cero, porque las líneas son concurrentes. Como el doble del ángulo es cero se sigue que

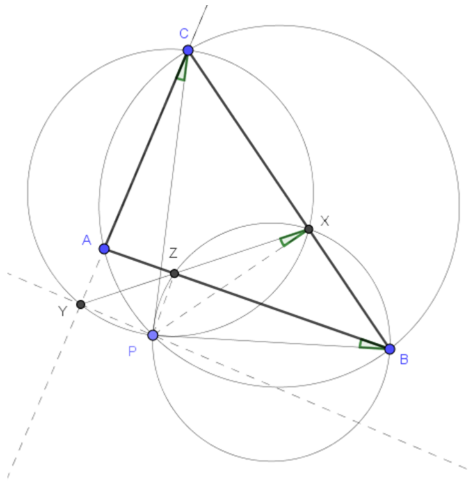
$$\angle D_1, \angle D_2 = \frac{\pi}{2}$$

■

Teorema 1.7 (Simson, prueba con ángulos dirigidos)

Dado un triángulo ABC y un punto P en su circuncírculo, sean X, Y, Z las proyecciones de P en los lados del triángulo, entonces X,Y,Z estan alineados ♡

Demostración Según la figura



a) Al considerar los puntos PZXB se tiene
   (a). $\angle PXB$ es recto
   (b). $\angle PZB$ es recto
   Y por tanto el cuadrilátero PZXB es cíclico y en consecuencia
$$\angle PXZ = \angle PBZ = \angle PBA$$
   abren el mismo arco
b) Al considerar los puntos PXYC se tiene
   (a). $\angle PYC$ es recto
   (b). $\angle PXC$ es recto
   Por tanto $\angle PYC + \angle PXC = 180$, en consecuencia los ángulos son suplementarios y el cuadrilátero PXYC es cíclico. Tenemos entonces
$$\angle PXY = \angle PCY = \angle PCA$$
c) Al considerar que el cuadrilátero APBC que es cíclico, se tiene
   (a). $\angle PBA = \angle PCA$
   (b). $\angle PXZ = \angle PBA = \angle PCA = \angle PXY$
   (c). $\angle PXZ = \angle PXY$

en consecuencia X,Y,Z estan alineados. ■

Teorema 1.8 (Miquel.)

Dados un triángulo $\triangle ABC$ y puntos $X \in a$, $Y \in b$ y $Z \in c$. Sean $\mathcal{C}_A$, $\mathcal{C}_B$ y $\mathcal{C}_C$ los círculos determinados por A,Y y Z; B, Z y X; y C, X y Y respectivamente, entonces los círculos tienen un punto P en común. Se tienen las igualdades $\angle ACP = \angle YXP$, $\angle ABP = \angle ZXP$, $\angle PX, BC = \angle PX, CA$ y $\angle PZ, AB$. Además
$$\angle BPC = \angle BAC + \angle YXZ$$
♡

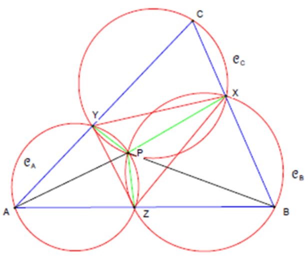
Demostración Sea $\mathcal{C}_A \cap \mathcal{C}_B = \{P, Z\}$. Entonces

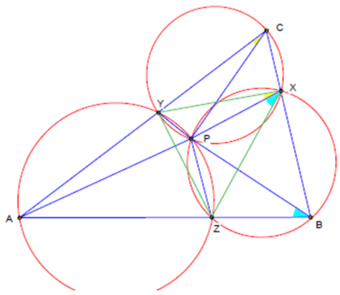
$$\angle YPZ = \angle YAZ = \angle CAB$$
$$\angle ZPX = \angle ZBX = \angle ABC$$

sumando obtenemos

$$\begin{aligned} \angle YPX &= \angle YPZ + \angle ZPX = \angle CAB + \angle ABC \\ &= \angle ACB = \angle YCX \end{aligned}$$

y por lo tanto los puntos P, C, X y Y son concíclicos, o lo que es lo mismo $P \in \mathcal{C}_C$





Como Y, P, X y C están en el círculo $\mathcal{C}_C$ tenemos que $\angle ACP = \angle YPX$. Además

$$\begin{aligned} \angle BPC &= \angle BPX + \angle XPC = \angle BZX + \angle XYC \\ &= \angle AB,\ ZX + \angle XY,\ AC \\ &= \angle AB,\ AC + \angle XY,\ YZ \\ &= \angle BAC + \angle YXZ \end{aligned}$$

■

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Sea H el ortocentro del triángulo $\triangle ABC$. Use ángulos dirigidos para mostrar que AEHF, BFHD son concíclicos, donde F, D y E son los pies de las alturas de los lados AB, BC y AC respectivamente.