Facultad de Ciencias UNAM

GEOMETRÍA MODERNA

Notas del curso Geometría Moderna 1

Unidad 2

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

1. Unidad 2. Circunferencia y cuadriláteros cíclicos **1**

1.1. Líneas Antiparaleas 1

Capítulo 1 Problemas para pensar 4

Capítulo 1 Unidad 2. Circunferencia y cuadriláteros cíclicos

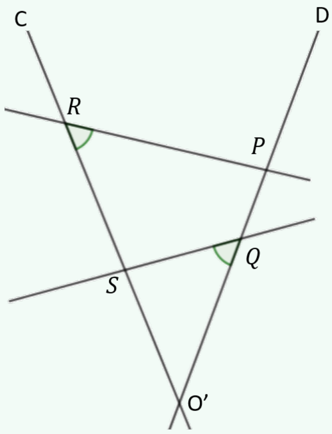
1.1 Líneas Antiparaleas

Anteriormente se vió un criterio de ciclicidad referente a los ángulos opuestos de un cuadrilátero. La noción de antiparalelismo de pares de rectas nos da un segundo criterio a este respecto.

Definición 1.1

*Se dice que dos transversales RP y SQ a dos líneas C y D son **antiparalelas** con respecto a esas dos líneas, si forman ángulos iguales con ellas en el sentido*

$$\angle O'QS = \angle O'RP$$

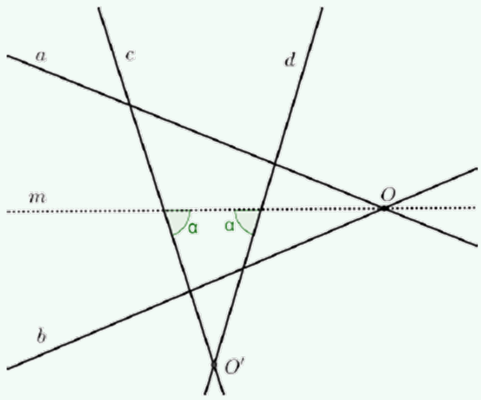


en otras palabras, si los triángulos $\triangle O'RP$ y $\triangle O'SQ$ son inversamente senejantes. ♣

Si dos pares de rectas están en tal forma que la bisectriz del ángulo formado por el primer par, es transversal al segundo par y los ángulos interiores en el mismo lado de la transversal son iguales, definimos entonces rectas antiparelelas.

Definición 1.2 (Rectas antiparaleas)

Sean a, b y c, d dos pares de rectas de tal forma que la bisectriz m de las rectas a y b corta a las rectas c y d formando ángulos iguales interiores del mismo lado de la transversal, se dice que c y d son antiparalelas con respecto a las rectas a y b.

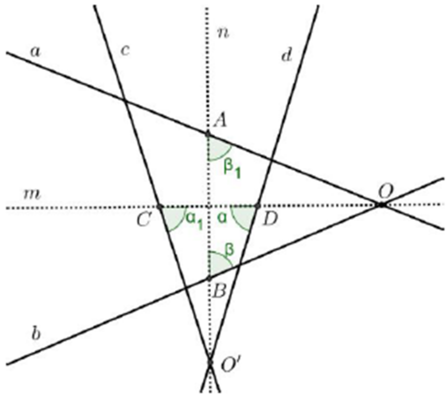


♣

Teorema 1.1

Si las rectas c y d son antiparalelas con respecto a las rectas a y b, entonces las rectas a y b son antiparalelas con respecto a las rectas c y d.

Demostración Sean las rectas c y d antiparalelas con respecto a las rectas a y b. Sea O el punto de intersección de a y b. Sea O' el punto de intersección de c y d. Sea m la bisectriz de a y b y sea n la bisectriz de c y d. Sean A y B las intersecciones de n con a y b respectivamente y sean C y D las intersecciones de m con c y d respectivamente.

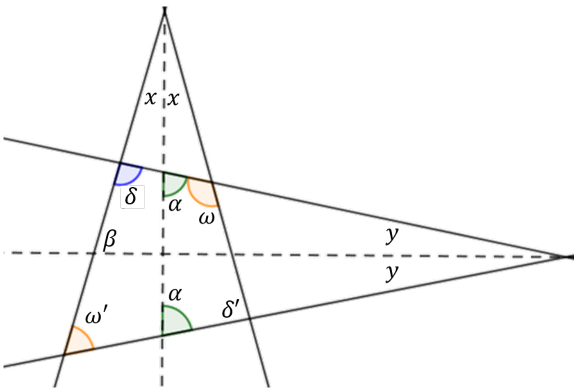


Sea α el ángulo formado por m y d y sea α_1 el formado por m y c. Por la definición de antiparalelas se tiene que $\alpha = \alpha_1$, por tanto, el $\triangle\ O'CD$ es isósceles. Por tanto, la bisectriz n de c y d es altura del lado CD y por tanto perpendicular a m. Se tiene entonces que la bisectriz m es también altura del $\triangle\ OAB$ y por tanto el triángulo es isósceles; por tanto, $\beta = \beta_1$, de donde a y b son también antiparalelas con respecto a las rectas c y d. ■

Proposición 1.1

Dadas unas rectas antiparalelas. El cuadrilátero formado por las intersecciones de las rectas del primer par con el segundo siempre resulta en un cuadrilátero cíclico

Demostración Considerando la siguiente figura

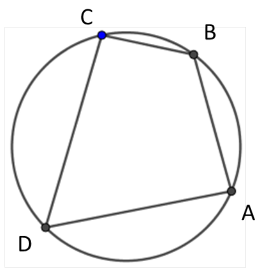


Se tiene que $\angle\ y + \angle\ \delta + \angle\ \beta = 180$, $\angle\ y + \angle\ \alpha + 90 = 180$ por lo que
$\angle\ y + \angle\ \delta + \angle\ \beta = \angle\ y + \angle\ \alpha + 90$ implican $\angle\ \delta + \angle\ \beta = \angle\ \alpha + 90$ por tanto $\angle\ \delta = \angle\ \alpha + 90 - \angle\beta$.
Ahora bien
$\angle\ x + \angle\ \alpha + \angle\ \delta' = 180$ y $\angle\ x + \angle\ \beta + 90 = 180$ implican $\angle\ \alpha + \angle\delta' = 90 + \angle\beta$ por tanto $\angle\delta' = 90 + \angle\beta - \angle\ \alpha$
de los resultados anteriores $\angle\ \delta + \angle\ \delta' = \angle\ \alpha + 90 - \angle\beta + 90 + \angle\beta - \angle\ \alpha = 180$.
por tanto δ y δ' suman 180 y por tanto se encuentran en un cuadrilátero cíclico. ■

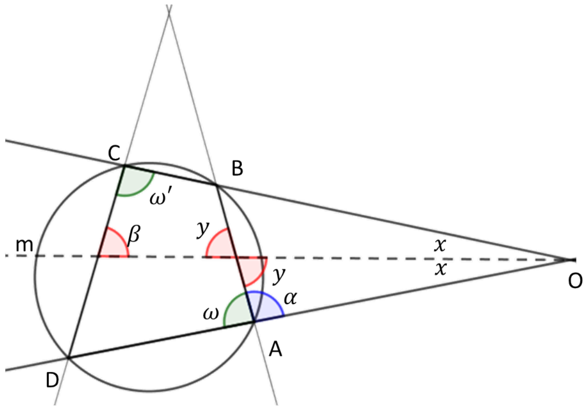
Proposición 1.2 (Antiparalelas y cuadriláteros cíclicos)

Cada par de lados opuestos en un cuadrilátero cíclico, es antiparalelo con respecto al otro par

Demostración Dado el cuadrilátero cíclico ABCD



Prolongamos dos lados hasta intersectar en O y trazamos su bisectriz AOM



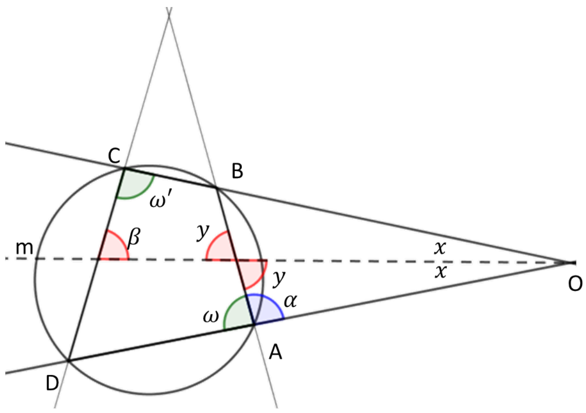
según la figura $\angle w + \angle w' = 180$ y $\angle x + \angle \beta + \angle w' = 180$ por lo que

$$\angle w + \angle w' = \angle x + \angle \beta + \angle w' \;\Rightarrow\; w = \angle x + \angle \beta$$

por lo tanto

$$\angle \beta = \angle w - \angle x \tag{1.1}$$

Por otro lado



$\angle x + \angle \alpha + \angle y = 180$ y $\angle w + \angle \alpha = 180$ por lo que

$$\angle x + \angle \alpha + \angle y = \angle w + \angle \alpha \;\Rightarrow\; \angle w = \angle x + \angle y$$

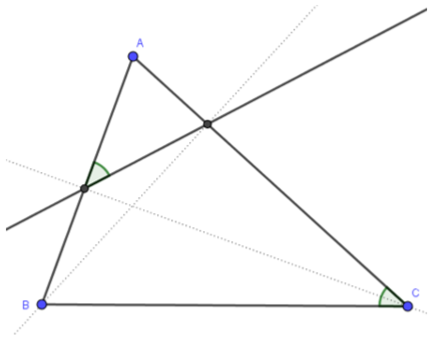
por lo tanto

$$\angle y = \angle w - \angle x \tag{1.2}$$

de $(1{,}1)$ y $(1{,}2)$ se tiene que $\angle\, y = \angle\, \beta$ y por lo tanto las rectas son antiparalelas. ■

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Pruebe que la línea que une los pies a dos alturas de un triángulo es antiparalela al tercer lado.



2. Pruebe que la tangente al circuncirculo en un vértice de un triángulo es antiparalela al lado opuesto.