Facultad de Ciencias
UNAM

GEOMETRÍA MODERNA

Notas del curso Geometría Moderna 1

Unidad 3

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

1. Unidad 3. Introducción a la geometría moderna **1**

1.1. Aplicaciones de la homotecia 1

Capítulo 1 Unidad 3. Introducción a la geometría moderna

1.1 Aplicaciones de la homotecia

1.1.1 Uso de homotecias en pruebas

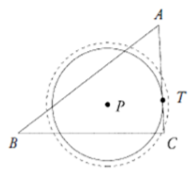
Recuerde que los cuatro puntos concurrentes principales de un triángulo son:

- el **incentro**, el punto donde se encuentran las bisectrices de los ángulos.
- el **circuncentro**, el punto donde se encuentran las mediatrices de los lados,
- el **centroide**, el punto donde se encuentran las medianas,
- el **ortocentro**, el punto donde se encuentran las alturas.

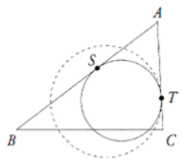
El **incírculo** es el círculo centrado en el incentro y es internamente tangente a los tres lados del triángulo.
El **circuncírculo** es el círculo centrado en el circuncentro que pasa por los tres vértices del triángulo.
A pesar de sus sugerentes nombres, ni el centroide ni el ortocentro son el centro de ningún círculo significativo asociado con el triángulo.

Teorema 1.1 (Incírculo)
El incírculo es el círculo más pequeño que se encuentra con los tres lados de un triángulo dado.

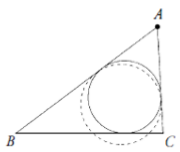
Demostración Sea C un círculo con centro P que interseca los tres lados del triángulo $\triangle ABC$. Si ninguno de los lados es tangente al círculo C, contráigalo usando una homotecia centrada en P, de modo que la imagen del círculo interseque todos los lados de $\triangle ABC$ pero sea tangente al menos a un lado. Sea T el punto de tangencia.



Si la imagen del círculo no es tangente a dos lados de triángulo $\triangle ABC$, luego contrae usando una homotecia centrada en T, de modo que la imagen del nuevo círculo todavía interseca los tres lados de $\triangle ABC$ y es tangente a al menos dos lados. Dejemos que el segundo punto de tangencia ser denotado por S.



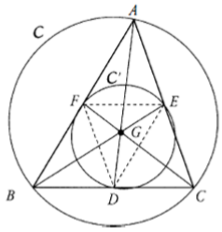
Si la imagen este círculo de no es tangente a los tres lados del triángulo $\triangle ABC$, luego contrae nuevamente usando una homotecia centrada en el vértice que es común a los dos lados tangentes al círculo.



Esta imagen del círculo es el incírculo del triángulo $\triangle ABC$. Dado que se obtuvo utilizando solo contracciones, es más pequeño que el círculo original C, a menos que C fuera ya el incirculo. ■

Ejemplo 1.1 **Desigualdad de Euler**: Demuestre que $R \geq 2r$, donde R es el circunradio y r el inradio de un triángulo. La igualdad es válida si y solo si el triángulo es equilátero.

Solución *Como en la figura siguiente, sea ABC el triángulo. Sean D, E y F los puntos medios de BC, CA y AB, respectivamente. Sea G el centroide del triángulo $\triangle ABC$ y sea C el círcuncirculo.*



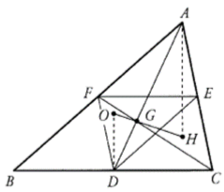
Recordando que G es un punto de trisección de cada mediana, vemos que $H_{G,-\frac{1}{2}}$ mapea A, B y C a D, E y F, respectivamente. Por tanto, C', la imagen de C bajo $H_{G,-\frac{1}{2}}$, es el circuncirculo del triángulo $\triangle DEF$, y el radio de C'es $\dfrac{R}{2}$.

Por tanto, C' es un círculo que tiene un punto en común con los tres lados de ABC, y el el círculo más pequeño de este tipo es su incírculo, por lo que podemos concluir que $R \geq 2r$.

Para que se mantenga la igualdad, C' debe ser el incírculo de ABC, tocando los lados en D, E, y F. Por lo tanto, el circuncentro coincide con el incentro de ABC, por lo tanto, ABC debe ser equilátero. ■

Ejemplo 1.2 **La línea Euler :** El centroide G, el circuncentro O y el ortocentro H de un triángulo son colineales. Además, G está entre O y H y $\overline{CH} = 2\overline{GO}$.

Solución *Esto también se prueba aplicando la homotecia $H_{G,-\frac{1}{2}}$. En el Triángulo dado ABC, sean D, E y F los puntos medios de BC, CA y AB, respectivamente. Como en el ejemplo anterior, $H_{G,-\frac{1}{2}}$ asigna A, B y C a D, E y F, respectivamente.*



La homotecia mapea la altura AH del triángulo ABC en una línea OD que es paralela a AH. En otras palabras, la homotecia mapea la altura desde A hacia la mediatriz del lado opuesto. Algo similar sucede con las otras dos alturas, por lo que la homotecia mapea la intersección de las alturas a la intersección de la mediatrices. En otras palabras, $H_{G,-\frac{1}{2}}$ mapea el ortocentro H de ABC en el circuncentro O de ABC.

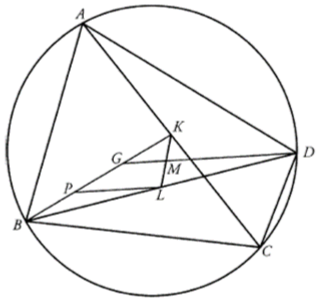
La definición de $H_{G,-\frac{1}{2}}$ nos dice que G, H y O son colineales y también que

$$\overline{GH} = -2\overline{GO}$$

■

Ejemplo 1.3 Sea ABCD es un cuadrilátero cíclico. Demuestre que los centroides del los triángulos ABC, BCD, CDA y DAB son cíclicos, es decir, que se encuentran en un círculo.

Solución *Sean K y L los puntos medios de las diagonales AC y BD, y sea M el punto medio de KL. Demostraremos el resultado mostrando que el cuadrilátero se formó por los centroides es la imagen A'B'C'D'de ABCD bajo* $H_{M,-\frac{1}{3}}$. *Dado que ABCD es un cuadrilátero cíclico, se deduce que la imagen también es un cuadrilátero cíclico, ya que el circuncírculo C de ABCD se mapeará en el circuncírculo de A'B'C'D'.*



Sea G el centroide del triángulo ABC. Mostraremos que G es en realidad D', la imagen de D bajo $H_{M,-\frac{1}{3}}$.
Sea P el punto medio de BG. Entonces P y G trisecan BK. En el triángulo BGD, los puntos P y L son los puntos medios de BG y BD, y los segmentos PL y GD son paralelos, con $\overline{GD} = 2\overline{PL}$.
En el triángulo KPL, los puntos G y M son los puntos medios de KP y KL, y los segmentos PL y GM son paralelos, con $\overline{PL} = 2\overline{GM}$.
Dado que GD y GM son paralelos a PL, se deduce que G, M y D son colineales. Dado que $\overline{GD} = 2\overline{PL}$ *y* $\overline{PL} = 2\overline{GM}$, *se deduce que* $\overline{GD} = 4\overline{GM}$ *o, de manera equivalente, que* $\overline{MD} = -3\overline{MG}$.
Esto muestra que $H_{M,-\frac{1}{3}}(D) = G$, *como se afirma. De manera similar, A', B' y C' son los centroides de BCD, CDA y DAB, respectivamente. Por tanto, los cuatro puntos A', B', C 'y D' se encuentran en el círculo C', que es la imagen de C bajo* $H_{M,-\frac{1}{3}}$. ■

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Desde un punto variable D, dentro del triángulo ABC, las perpendiculares DM, DN caen sobre AB, AC. Si $CN \cdot AC = BM \cdot AB$, encuentre el lugar geométrico del punto D.