Facultad de Ciencias
UNAM

GEOMETRÍA MODERNA

Notas del curso Geometría Moderna 1

Unidad 1

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 1. Geometría del triángulo

1.1 Euclides axiomas y postulados

Durante más de 2000 años, los Elementos han sido el punto de referencia absoluto del razonamiento matemático deductivo.
En los Elementos, Euclides presentó algunas afirmaciones llamadas **axiomas**, que consideró ser un conjunto de premisas evidentes en las que basaría sus conocimientos matemáticos. Aparte de los **axiomas**, Euclides presentó cinco afirmaciones adicionales llamadas **postulados**, cuya validez parecía menos segura que los axiomas, pero aún así considerados verdaderos.

Axiomas de Euclides

- Las cosas que son iguales a una misma cosa también son iguales entre sí.
- Si se van a sumar iguales a iguales, entonces los totales serán iguales.
- Si se van a restar iguales de iguales, los restos serán iguales.
- Las cosas que coinciden son iguales entre sí.
- El todo es más grande que la parte.

Los postulados de Euclides

- Hay un segmento de línea recta único que conecta dos puntos.
- Cualquier segmento de línea recta puede extenderse indefinidamente (continuamente) en un línea recta.
- Existe un círculo con cualquier centro y cualquier valor para su radio.
- Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
- Si una línea recta se cruza con otras dos líneas rectas, de tal manera que la suma de los ángulos internos en el mismo lado es menor que dos ángulos rectos, entonces los dos las líneas rectas eventualmente se encontrarán si se extienden indefinidamente.

1.2 Las construcciones y los postulados de Euclides

Al hacer una revisión de algunas de las propiedades elementales del triángulo se realizarán algunas construcciones geométricas. El problema de construir figuras geométricas es uno de los más antiguos de la geometría y se convirtió en una rama importante de la geometría elemental.
¿Qué quiere decir realizar una construcción geométrica?
El problema de realizar una construcción geométrica no se refiere a encontrar una solución más o menos aproximada para fines prácticos o sobre algún caso particular, sino establecer un procedimiento general, del que podamos además comprobar su veracidad a partir de propiedades ya demostradas, a través del método deductivo.
Llevar a cabo o realizar una construcción geométrica significa entonces que, a partir de elementos dados o ya construidos (puntos, rectas, triángulos, segmentos, círculos, etc.) se derivan otros elementos un número finito de veces, haciendo uso de herramientas predeterminadas (regla, compás, escuadras, transportador, etc.).

1.3 La Regla y el Compás

Los alcances constructivos de la regla y el compás, están caracterizados, en los tres primeros postulados de Euclides

1. Puede trazarse una recta de un punto a otro
2. Una recta finita puede prolongarse continuamente en línea recta
3. Una circunferencia puede describirse tomando cualquier centro y cualquier distancia

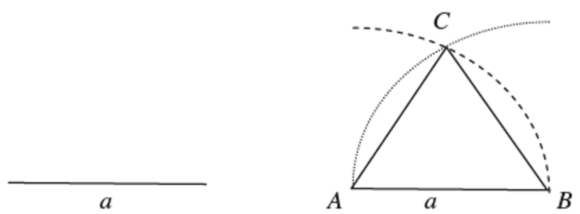
De acuerdo con los dos primeros postulados, la regla es, por definición, el instrumento que nos permite trazar la recta por dos puntos y prolongar cualquier segmento.

El compás, según el tercer postulado, es el instrumento que nos permite trazar una circunferencia que tenga como centro cualquier punto y que pase por cualquier otro punto. Este postulado restringe el uso del compás que conocemos actualmente, ya que no permite transportar distancias, esto es como si al levantar el compás del papel se cerrara automáticamente. Llamaremos a este compás que no permite transportar distancias "compás euclidiano", y al que conocemos que sí permite hacerlo "compás moderno". Aparentemente este hecho restringe las construcciones que se pueden hacer con el primero. Sin embargo, la segunda proposición del libro I de Euclides demuestra que sí es posible transportar distancias: (Es posible) colocar a partir de un punto dado (como extremo) una recta igual a otra dada.

Para demostrar esta proposición Euclides solamente hace uso de los postulados y la primera proposición del libro I: (Es posible) dada una recta finita, construir un triángulo equilátero.

Ejemplo 1.1 $\boxed{\text{Construcción de un triángulo equilátero}}$

- Dibuja el círculo con el centro A y el radio AB.
- Dibuja el círculo con el centro B y el radio AB.
- Dibuje los segmentos de línea desde A y B hasta la intersección C de los dos círculos recién construidos.

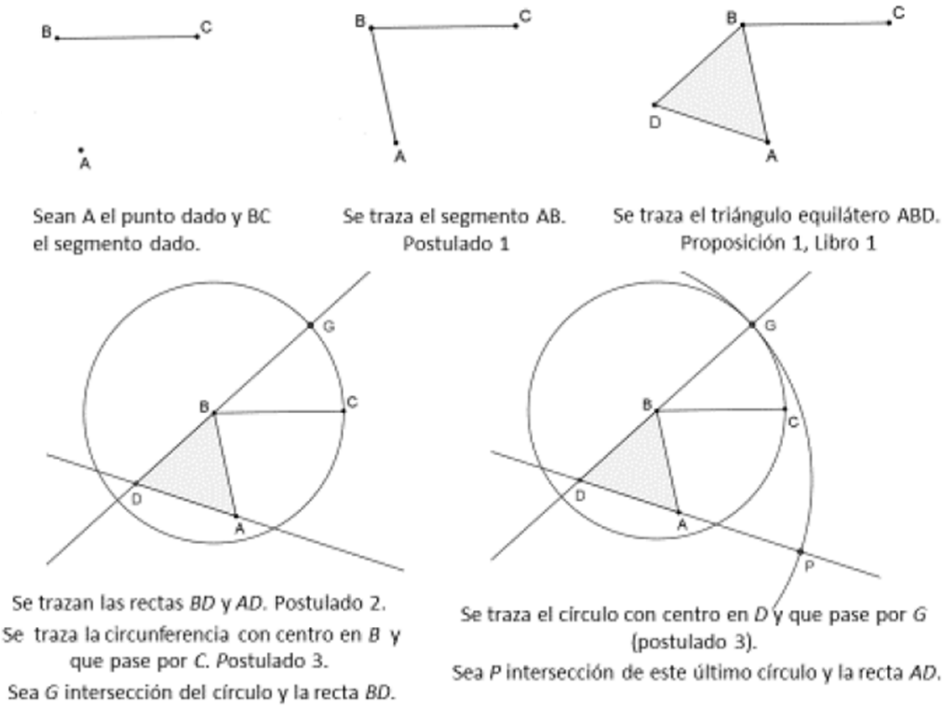


Los lados AB y CA tienen la misma longitud porque ambos son radios del primer círculo. Los lados AB y BC tienen la misma longitud porque ambos son radios del segundo círculo Por lo tanto, los tres lados del triángulo ABC son iguales.

Comentario Euclides se encarga de justificar los pasos en la construcción en términos del conjunto inicial de cinco postulados y cinco axiomas, excepto por el paso donde se encuentra el punto de intersección de los dos círculos. Euclides aquí asumió un principio de continuidad de círculos. Es decir, dado que el círculo c_1 tiene puntos dentro y fuera de otro círculo c_2, entonces los dos círculos deben cruzarse algun lado. En otras palabras, no hay agujeros en los círculos. Para hacer esto prueba rigurosa, tendríamos que agregar un postulado sobre la continuidad del círculo, o probar la continuidad del círculo como consecuencia de los otros cinco postulados. Podemos ver que desde la primera proposición, Euclides no estaba lógicamente perfecto.

El cuarto postulado dice que las reglas del juego que estamos jugando no cambian. A medida que nos movemos de un lugar a otro. En muchos de los teoremas de Euclides, se mueve partes de figuras sobre otras figuras. Euclides quiere una base axiomática por que puede suponer que las longitudes y los ángulos de los segmentos permanecen sin cambios al mover una figura geométrica. En el cuarto postulado, Euclides está diciendo que, al menos, los ángulos rectos son siempre iguales sin importar la configuración de ellos. En muchas de sus demostraciones, Euclides asume mucho más que las garantías del Postulado 4.

Ejemplo 1.2 Compás euclidiano y compás moderno



Esta construcción permite afirmar que cualquier construcción que se puede realizar con el compás moderno se puede también realizar con el compás euclidiano, aunque por un procedimiento más largo, porque cada vez que se requiere trasladar segmentos hay que hacer esta construcción adicional. Sin embargo, ya que los dos compases son equivalentes, usaremos el moderno por razones prácticas, sin pérdida de rigor.

¿Cuál es la característica de las construcciones que se pueden realizar con regla y compás?

Para llevar a cabo una construcción se puede realizar un número finito de estas construcciones básicas. Esto es, se puede:

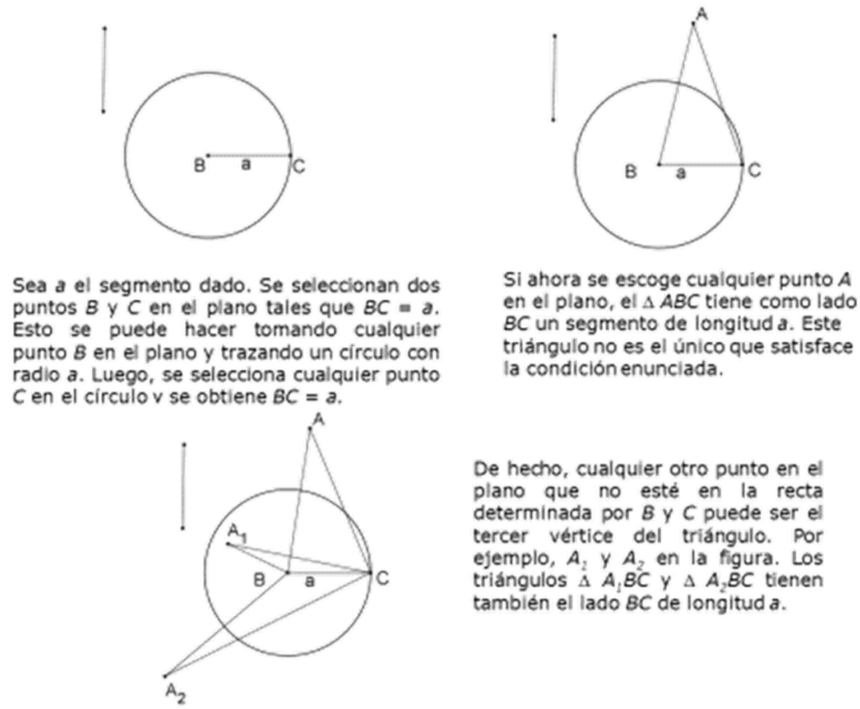
- Trazar la recta que pasa por dos puntos.
- Determinar el punto de intersección de dos rectas.
- Trazar un círculo con centro en un punto dado y radio dado.
- Determinar los puntos de intersección de una recta y un círculo.
- Determinar los puntos de intersección de dos círculos.

Cualquier construcción que se puede realizar con regla y compás, es una sucesión finita de estas construcciones. Existen instrumentos además de la regla y el compás con los cuales es posible realizar construcciones geométricas. De hecho, en los intentos por trisecar el ángulo, duplicar el cubo y cuadrar el círculo los griegos hicieron uso de instrumentos mecánicos y desarrollaron curvas como la cuadratriz.

1.4 Construcción de triángulos

Ejemplo 1.3 Construir un triángulo que tenga un segmento dado a como uno de sus lados

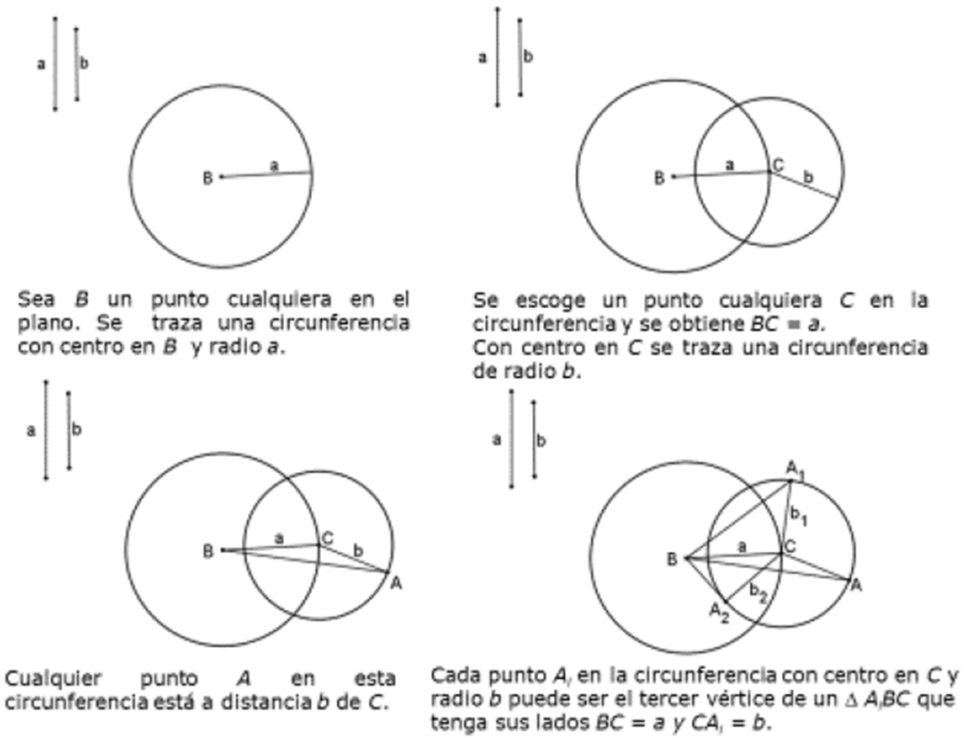
En este caso



Existen una infinidad de triángulos que tiene como lado un segmento de longitud a. Es también claro que los otros dos lados de los triángulos, no tienen en general la misma longitud cuando variamos el punto A.

Ejemplo 1.4 Construir un triángulo que tenga dos segmentos dados a y b como lados

En este caso



Existen una infinidad de triángulos que tienen dos de sus lados de longitud a y b respectivamente, tantos como puntos en el círculo de radio b. El tercer lado de los triángulos construidos, no tiene necesariamente la misma longitud cuando variamos el punto A sobre el círculo.

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Dados tres segmentos a, b y c, construye un triángulo que los tenga como lados. Determine si siempre se puede construir el triángulo. Si no siempre se puede construir, determine la relación que debe haber entre la magnitud de los lados para que sea construible.