Facultad de Ciencias UNAM

GEOMETRÍA MODERNA

Notas del curso Geometría Moderna 1

Unidad 2

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 2. Circunferencia y cuadriláteros cíclicos

1.1 Circunferencia de los nueve puntos

Definición 1.1 (Trapecio isóceles)

Un trapecio isósceles es un trapecio que tiene dos lados no paralelos iguales en longitud.

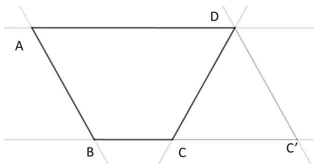
♣

Proposición 1.1 (Un trapecio isóceles es cíclico)

Un trapecio isóceles es un cuadrilátero cíclico

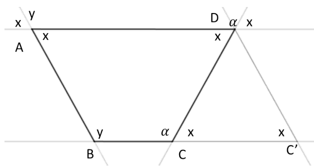
♠

Demostración Si trazamos una paralela a la línea AB que pase por D, se completa un paralelogramo $\varangle ABC'D$.



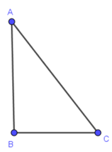
Como $AB = CD$ entonces el triángulo $CC'D$ es isóceles por lo que $\angle DCC' = x = \angle CC'D$ y como AD es paralela a BC entonces en el vértice D se tiene el ángulo $\angle x$ y por ser opuesto al vértice $\angle ADC = x$.
Por otro lado llamamos $y = \angle ABC$ y por ser AD es paralela a BC entonces en el vértice A se tiene el ángulo $\angle y$.
Según la figura

$$x + \alpha = x + y \Rightarrow \alpha = y$$

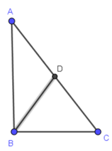


de esta manera en los ángulos opuestos $\angle x, \angle \alpha$ se tiene $x + \alpha = 180$ es decir son suplementarios por lo tanto el cuadrilátero ABCD es cíclico. ■

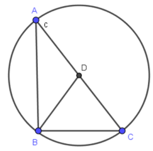
En un triángulo rectángulo $\triangle ABC$



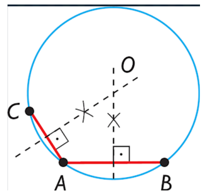
Si nos tomamos el punto medio D del lado AC y trazamos el segmento desde B a D, entonces $AD = DC$



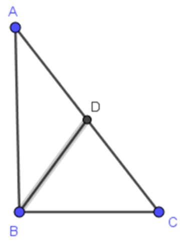
considerando AC como diámetro se cumple que $BC = BD$



Por tres puntos no colineales pasa una circunferencia, pues para ello se trazan los segmentos que unen los puntos posteriormente se trazan las mediatrices de los segmentos y donde se intersecten se trendrá el centro de una circunferencia que pasará por los tres puntos

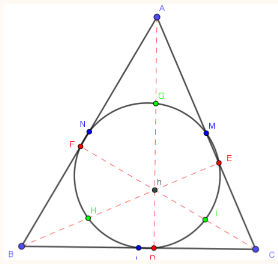


concluimos entonces que en un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ si por el lado AC se toma el punto medio y se le llama D y se traza el segmento desde B hasta D se cumple que $AD = BD = DC$



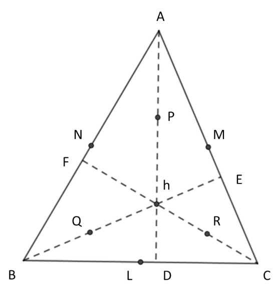
Teorema 1.1 (Circunferencia de los nueve puntos)

En un triángulo $\triangle ABC$, si consideramos los pies de las tres alturas, los puntos medios de los tres lados y los puntos medios de los segmentos que van de los vértices al ortocentro, entonces se cumple que estos puntos estan en una circunferencia

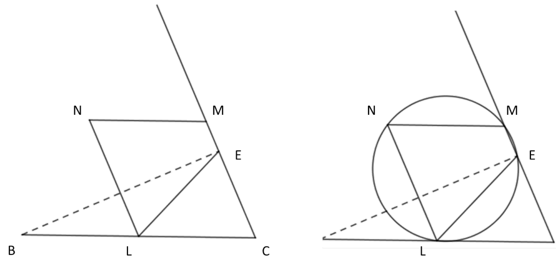


♡

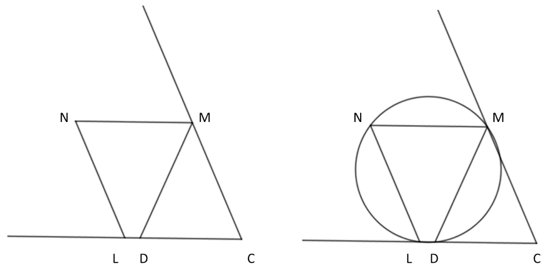
Demostración En el triángulo $\triangle ABC$, sean N,M,L puntos medios de los lados AB,AC y BC respectivamrente, sean D,E,F los pies de las alturas y h su ortocentro, sean P,Q,R los puntos medio de los segmentos Ah, Bh y Ch respectivamente



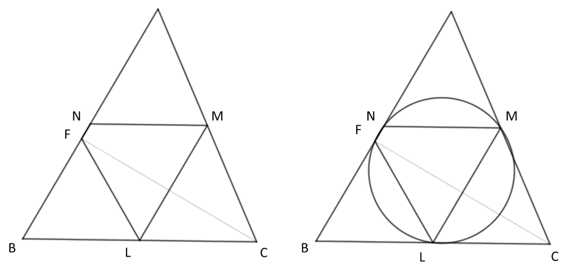
Consideramos el cuadrilátero $\square NLEM$



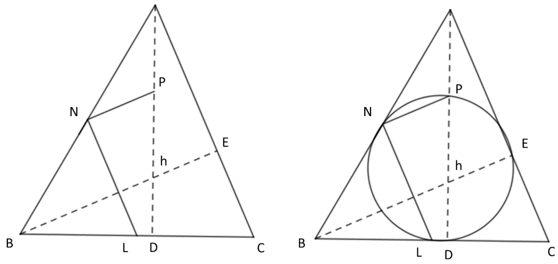
Tenemos que el triángulo $\triangle BEC$ es rectángulo y E va al punto medio L de BC por lo que LE=LC. Por otro lado el segemento NM es paralelo a BC y en longitud NM=LC. Se tiene entonces un trapecio isóceles con lados paralelos NL y ME y lados NM, LE con longitudes iguales, por lo que éste cuadrilátero $\square NLEM$ es cíclico según la proposición 1.
Consideramos el cuadrilátero $\square NLMD$



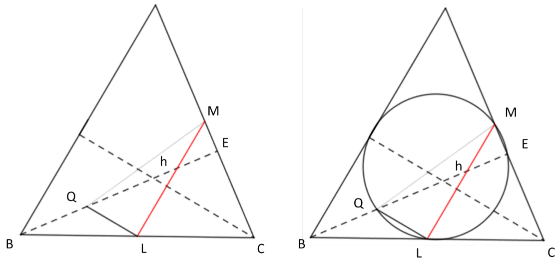
Tenemos que el triángulo $\triangle MDC$ es isóceles y las longitudes MD y MC son iguales, y como la longitud MC es igual a la longitud NL, por lo que el trapecio NMLD es isoceles con lados paralelos NM y LD y lados iguales NL y MD, por lo que éste cuadrilátero $\square NLMD$ es cíclico según la proposición 1.
Consideramos el cuadrilátero $\square NMLF$



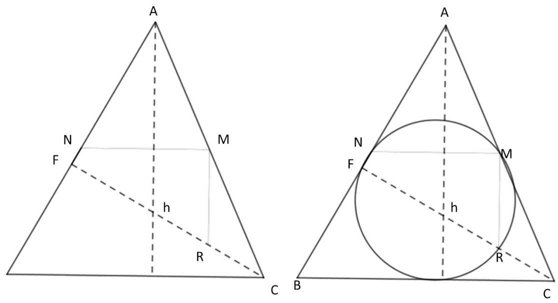
Tenemos que el triángulo $\triangle CFB$ es rectángulo y F va al punto medio L de BC por lo que FL=LC Por otro lado el segemento NM es paralelo a BC y en longitud NM=LC. Se tiene entonces un trapecio isóceles con lados paralelos FN y LM y lados FL, MN con longitudes iguales, por lo que éste cuadrilátero $\square NMLF$ es cíclico según la proposición 1.
Ahora bien si P es punto medio entre el vértice A y el ortocentro h, se tiene entonces que los triángulos $\triangle ANP$ y $\triangle ABH$ son semejantes, por lo tanto NP es paralela a Bh lo cual implica que el ángulo $\angle PNL$ es recto y como el ángulo $\angle LDP$ es recto entonces son ángulos suplementarios. De manera que el cuadrilátero $\square NLPD$ es cíclico



si Q es punto medio entre el vértice B y el ortocentro h, se tiene entonces que los triángulos $\triangle BCH$ y $\triangle BQL$ son semejantes, por lo tanto QL es paralela a Ch lo cual implica que el ángulo $\angle\, QLM$ es recto y como el ángulo $\angle\, QEM$ es recto entonces tomando QM como diámetro se tiene que el cuadrilátero $\square QLEM$ es cíclico



si R es punto medio entre el vértice C y el ortocentro h, se tiene entonces que los triángulos $\triangle AhC$ y $\triangle MRC$ son semejantes, por lo tanto MR es paralela a Ah lo cual implica que el ángulo $\angle\, RMM$ es recto y como el ángulo $\angle\, RFN$ es recto entonces son ángulos suplementarios por lo que cuadrilátero $\square FNRM$ es cíclico



concluimos de todo lo anterior que tenemos una circunferencia que pasa por los puntos medios L,M,N de los lados del triángulo $\triangle ABC$, que pasa por D,E,F los pies de las alturas del triángulo $\triangle ABC$ y que pasa por los puntos medios de los segmentos que unen los vértices del triángulo $\triangle ABC$ con el ortocentro h. Ésta circunferencia es llamada la circunferencia de los nueve puntos. ■

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Muestre que el centro del círculo de nueve puntos de un triángulo es el punto medio del segmento desde el ortocentro hasta el centro del circuncirculo del triángulo.