GEOMETRÍA MODERNA

Notas del curso Geometría Moderna 1

Unidad 2

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

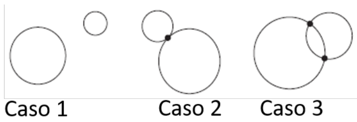
Índice general

Capítulo 1 Unidad 2. Circunferencia y cuadriláteros cíclicos

1.1 Familias de círculos

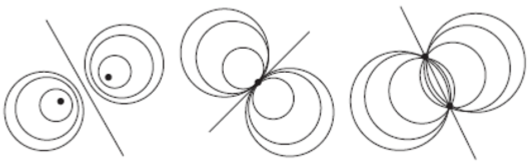
Cualesquiera dos círculos (distintos) en el plano están relacionados en una de las siguientes formas:

- No pueden cruzarse,
- Pueden cruzarse precisamente en un punto,
- Pueden cruzarse en dos puntos distintos.



Los círculos que no se cruzan determinan una familia de círculos. Consideraremos las otras dos familias, a saber, familias de círculos que se cruzan precisamente en un punto y familias de círculos que se cruzan precisamente en dos puntos.

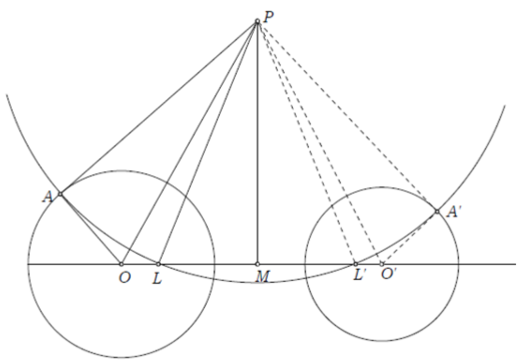
Cada una de estas tres familias contiene precisamente una línea extendida conocida como el **eje radical** de la familia. Los centros de los círculos de cada familia se encuentran en una línea, o eje, que es perpendicular al eje radical. Dado que todos los círculos en cada familia es simétrica sobre el eje a través de sus centros, las familias se conocen como **familias coaxiales**.



Teorema 1.1 (Puntos límite)

Todas las circunferencias que cortan ortogonalmente a dos circunferencias que no se intersectan, intersectan la línea de los centros en los mismos dos puntos.

Demostración Supongamos que el círculo de centro P corte a las circunferencias de centros O y O' ortogonalmente, y sean $L,\ L'$ las intersecciones de éste circulo con la línea de los centros.



podemos ver que los triángulos $\triangle\, PLM$ y $\triangle\, POM$ son rectángulos, por lo tanto:

$$PL^2 = PM^2 + LM^2$$

por otra parte

$$PM^2 = PO^2 - OM^2$$

de donde:

$$LM^2 = PL^2 - PO^2 + OM^2$$

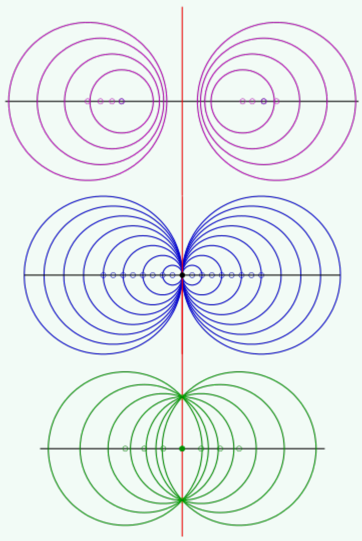
es decir,

$$LM^2 = PA^2 - PO^2 + OM^2 = OM^2 - OA^2$$

Similarmente $L'M^2 = O'M^2 - O'A^2$.
Lo anterior implica que los puntos en los que una circunferencia ortogonal a otras dos, ajenas, corta a la línea de los centros de éstas son dos puntos fijos, independientes de la circunferencia ortogonal de que se trate. A dichos puntos se les llama puntos límites. ■

1.2 Circunferencias Coaxiales

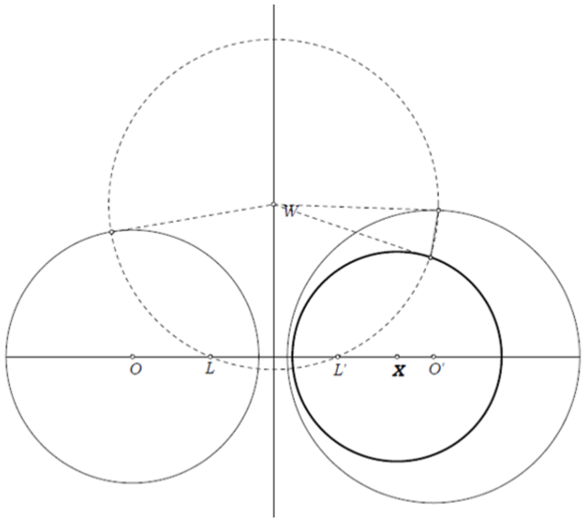
Definición 1.1 (Familia coaxial de circunferencias)
*Sea $\mathcal{F}$ una familia de circunferencias en el plano. Decimos que $\mathcal{F}$ es una **familia coaxial** si cada par de circunferencias de la familia, tienen el mismo eje radical. Al eje radical de cada pareja se le llama el eje radical de la **familia coaxial**.*



♣

Cuando dos circunferencias son ajenas se puede demostrar que también determinan una familia de circunferencias coaxiales; para construir alguno de los miembros de dicha familia podemos partir de la propiedad de que todas las circunferencias ortogonales a las dos circunferencias dadas pasan por los puntos límites de ellas, como ya se demostró. Y viceversa, cualquier circunferencia ortogonal a las que pasan por los puntos límites y tenga su centro en la línea de los centros será coaxial con las dos circunferencias dadas.

En la Figura se dan las circunferencias O y O', se localizan los puntos límites L y L' mediante una circunferencia ortogonal a ambas W,



luego se construye una circunferencia ortogonal a W con centro X, en la línea de los centros OO' , la cual resultará coaxial con las dos primeras, puesto que las tangentes a todas ellas trazadas desde el punto W son radios de la ortogonal

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Muestre que si dos circunferencias se intersecan, entonces cualquier circunferencia ortogonal a ellas no cortará a la línea de los centros
2. Muestre que la familia de circunferencias $\mathcal{F}$ es una familia coaxial.