GEOMETRÍA MODERNA

Notas del curso Geometría Moderna 1

Unidad 1

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 1. Geometría del triángulo

1.1 Figuras congruentes

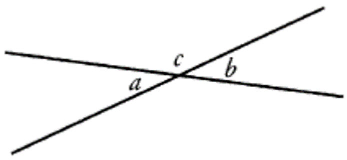
Se dice que dos figuras que tienen exactamente la misma forma y exactamente el mismo tamaño son **congruentes**. Más explícitamente:

1. Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida.
2. Dos segmentos de recta son congruentes si tienen la misma longitud.
3. Dos círculos son congruentes si tienen el mismo radio.
4. Dos triángulos son congruentes si los lados y ángulos correspondientes son iguales.
5. Todos los rayos son congruentes.
6. Todas las rectas son congruentes.

Teorema 1.1 (Ángulos opuestos por el vertice)

Los ángulos opuestos por el vertice son congruentes. ♡

Demostración Tenemos que mostrar que $a = b$



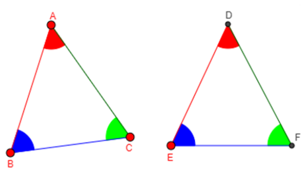
Tenemos que $a + c = 180$ y $b + c = 180$ y de esto se sigue que $a = b$.■

Notación El símbolo $\equiv$ denota **congruencia**. Usamos la notación $\triangle\, ABC$ para denotar un triángulo con vértices A, B y C, y usamos $C(P, r)$ para denotar un círculo con centro P y radio r.

Por lo tanto, $C(P, r) = C(Q, s)$ si y solo si $r = s$.

Nos preocuparemos principalmente por la noción de triángulos congruentes, y mencionamos que en la definición, $\triangle\, ABC = \triangle\, DEF$ si y solo si se cumplen las siguientes seis condiciones:

$$\angle\, A \equiv \angle\, D$$
$$\angle\, B \equiv \angle\, E$$
$$\angle\, C \equiv \angle\, F$$
$$AB \equiv DE$$
$$BC \equiv EF$$
$$AC \equiv DF$$

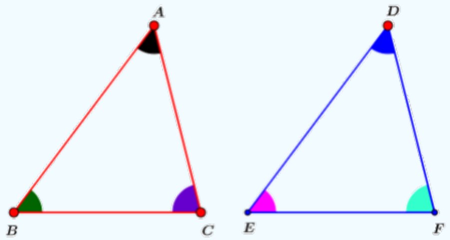


Comentario Según la definición de congruencia, dos triángulos son congruentes si y solo si seis partes diferentes de uno son congruentes con las seis partes correspondientes del otro. ¿Realmente necesitamos verificar

los seis elementos? La respuesta es no.
En otras palabras, esperaría que sea posible verificar la congruencia al verificar que los tres lados correspondientes sean congruentes. De hecho, este es el caso y, de hecho, ¡hay varias! formas de verificar la congruencia sin verificar las seis condiciones.
Las tres condiciones de congruencia de triángulos que se utilizan con más frecuencia son la condición Lado-Ángulo-Lado (LAL), la condición Lado-Lado-Lado (LLL) y la condición Ángulo-Lado-Ángulo (ALA).

Proposición 1.1 (Criterio Lado-Ángulo-Lado(LAL))

Si dos triángulos tienen dos lados y el ángulo entre ellos iguales entonces los otros lados y los otros ángulos también son iguales.

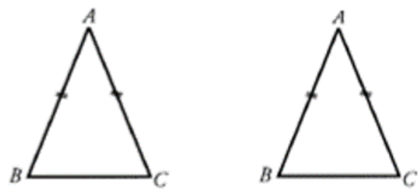


Demostración Si $\triangle\ ABC$ y $\triangle\ DEF$ son dos triángulos con AB=DE, AC=DF y los ángulos $\angle\ BAC$ y $\angle\ EDC$ iguales. Desplazar al triángulo $\triangle\ DEF$ de modo que DE coincida con AB, y que el ángulo $\angle\ EDF$ coincida con el ángulo $\angle\ BAC$. Entonces la linea DF coincide con la linea AC, así que F coincide con C. Entonces la línea BC debe coincidir con la línea EF, así que los dos triángulos coinciden y por lo tanto sus lados y ángulos son iguales.■

Ejemplo 1.1 Teorema del triángulo isósceles

Si $\triangle ABC$ es un triángulo isóceles con lados AB y AC tal que $AB = AC$ entonces sucede que $\angle\ ABC = \angle\ ACB$.

Demostración Suponga que se tiene un triángulo $\triangle\ ABC$ con $AB = AC$



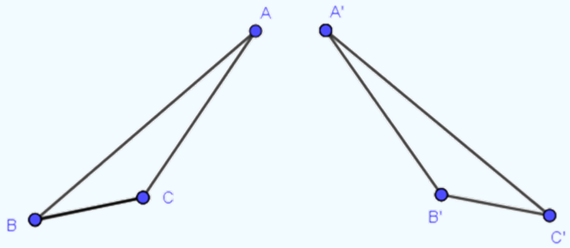
En el triángulo $\triangle\ ABC$ y $\triangle\ ACB$ tenemos

$$AB = AC$$
$$\angle\ BAC = \angle\ CAB$$
$$AC = AB$$

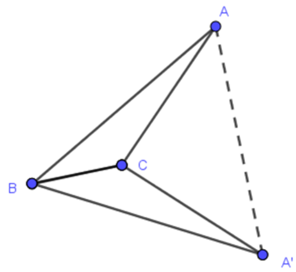
entonces $\triangle\ ABC \equiv \triangle\ ACB$ por el **criterio (LAL)**. En consecuencia $\angle\ ABC = \angle\ ACB$ ■

Proposición 1.2 (Criterio Lado-Lado-Lado (LLL))

Si dos triángulos tienen los 3 lados respectivos iguales, también tendrán ángulos iguales.



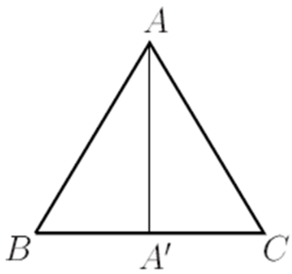
Demostración Colocamos el $\triangle A'B'C'$ de tal manera que $B'C'$ coincida con BC pero que A y A' queden en lados opuestos a BC.



- Trazamos la recta AA' y tenemos que $AB = A'B'$ por tanto el triángulo $\triangle ABA'$ es isóceles y en consecuencia $\angle BAA' = \angle BA'A$
- $AC = A'C'$ por tanto el triángulo $\triangle ACA'$ es isóceles y $\angle CAA' = \angle CA'A$
- Además $\angle A = \angle BAA' - \angle CAA'$ y $\angle A' = \angle BA'A - \angle CA'A$ consecuentemente $\angle A = \angle A'$
- Por **criterio (LAL)** $\angle B = \angle B'$ y $\angle C = \angle C'$

■

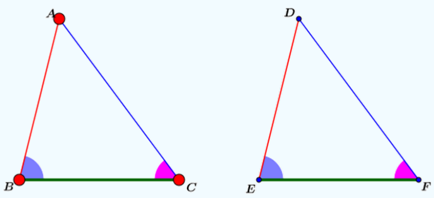
Ejemplo 1.2 Si $\triangle ABC$ es un triángulo con $AB = CA$ y si A' es el punto medio de BC, entonces los triángulos $\triangle ABA'$ y $\triangle ACA'$ son congruentes



En efecto, los lados AB, BA' y AA' del triángulo $\triangle ABA'$ son congruentes respectivamente a los lados AC, CA' y $A'A$ del triángulo $\triangle ACA'$; por el **criterio LLL**, los triángulos son congruentes.

Proposición 1.3 (Criterio Ángulo-Lado-Ángulo(ALA))

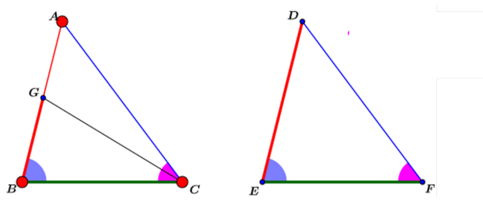
Dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales son congruentes.



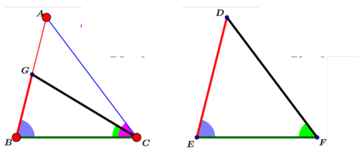
Demostración Sabemos que

a) $\angle ABC = \angle DEF$
b) $\angle BCA = \angle EDF$
c) $BC = EF$

Si AB no fuera igual a DE, entonces uno de ellos es mayor.
Supongamos que $AB > DE$, podemos construir un segmento BG igual a DE, y unimos G con C.



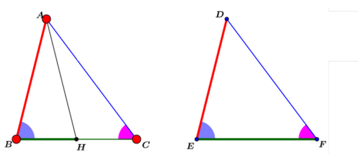
Puesto que $BG = DE$ y $BC = EF$ respectivamente, y $\angle GBC = \angle DEF$, entonces la base GC es igual a la base DF, y los triángulos $\triangle GBC$ y $\triangle DEF$ son iguales, y los ángulos restantes iguales a los ángulos restantes, a saber aquellos opuestos a los lados iguales. Por lo tanto $\angle GBC = \angle DFE$
Por hipótesis $\angle DFE = \angle BCA$. Por lo tanto $\angle GCB = \angle BCA$, el ángulo menor es igual al mayor, lo cual es imposible.



Supongamos ahora que

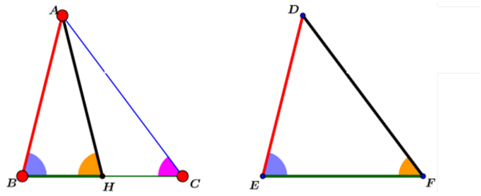
a) $\angle ABC = \angle DEF$
b) $\angle BCA = \angle EDF$
c) pero, que el lado respectivamente igual, es opuesto a los ángulos que son iguales, digamos $BC = DE$

Si BC no fuera igual a EF, entonces uno de ellos es mayor.
Supongamos que $C > EF$, podemos construir un segmento BH igual a EF, y unimos A con H.

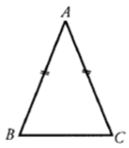


Puesto que $BH = EF$ y $AB = DE$ respectivamente, y $\angle ABH = \angle DEF$, entonces la base AH es igual a la base DF, y los triángulos $\triangle ABH$ y $\triangle DEF$ son iguales, y los ángulos restantes iguales a los ángulos

restantes, a saber aquellos opuestos a los lados iguales. Por lo tanto $\angle BHA = \angle EFD$
Por hipótesis $\angle EFD = \angle BCA$. Por lo tanto $\angle BHA$, es ángulo exterior del triángulo $\triangle AHC$. Tenemos entonces que $\angle BHA > \angle BCA$.
Entonces tenemos a la vez que $\angle BHA$ es igual y mayor que $\angle BCA$. Esto es una contradicción



Ejemplo 1.3 Inverso del teorema del triángulo isósceles
Si en un triángulo $\triangle ABC$ tenemos que $\angle B = \angle C$, entonces $AB = AC$
Demostración En el triángulo $\triangle ABC$ y $\triangle ACB$,



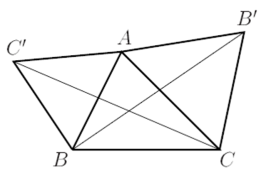
tenemos

$$\angle ACB = \angle ACB$$
$$BC = CB$$
$$\angle ACB = \angle ABC$$

por lo que $\triangle ABC \equiv \triangle ACB$ por el **criterio (ALA)**. Por lo tanto si $\triangle ABC \equiv \triangle ACB$ se sigue que $AB = AC$

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Si sobre los lados AB y CA de un triángulo $\triangle ABC$ se construyen triángulos equiláteros $\triangle ABC'$ y $\triangle CAB'$, siempre se tiene que $BB' = CC'$



2. La diagonal AC del paralelogramos ABCD divide a éste en dos triángulos congruentes