Facultad de Ciencias UNAM

GEOMETRÍA MODERNA

Notas del curso Geometría Moderna 1

Unidad 1

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 1. Geometría del triángulo

1.1 Congruencia de triángulos (parte 2)

Criterios de congruencia

Axioma 1.1 (Criterio (LAL))

Dos triángulos son congruentes si dos lados y un ángulo de uno son congruentes con dos lados y un ángulo del otro. ♡

Teorema 1.1 (Criterio (LLL))

Dos triángulos son congruentes si los tres lados de uno son congruentes con los tres lados correspondientes del otro. ♡

Teorema 1.2 (Criterio (ALA))

Dos triángulos son congruentes si dos ángulos y un lado de uno son congruentes con dos ángulos y un lado del otro. ♡

Comentario La condición LAL es un axioma y los otros dos se expresan como teoremas. Cualquiera de las tres condiciones podría usarse como axioma y las otras dos se derivarían luego como teoremas. En caso de que se pregunte por qué se prefiere la condición LAL como axioma básico en lugar de la condición LLL, es porque siempre es posible construir un triángulo dados dos lados y el ángulo incluido, mientras que no siempre es posible construir un triángulo dados tres lados (considere los lados de longitud 3, 1 y 1).

Axioma 1.2 (Desigualdad del triángulo)

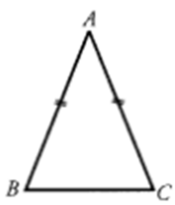
La suma de las longitudes de dos lados de un triángulo siempre es mayor que la longitud del lado restante. ♡

Las condiciones de congruencia son útiles porque nos permiten concluir que ciertas partes de dos triángulos son congruentes al determinar que ciertas otras partes son congruentes.
Así es como se puede usar la congruencia para probar dos teoremas bien conocidos sobre triángulos isósceles. (Un triángulo isósceles es uno que tiene dos lados iguales).

Teorema 1.3 (Recíproco del Teorema del triángulo isóceles)

Si en un triángulo $\triangle ABC$ *se tiene que* $\angle\, ABC = \angle\, ACB$ *entonces sucede que* $AB = AC$ *.* ♡

Demostración Si en los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ACB$



tenemos

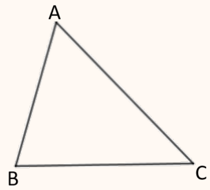
$$\angle ABC = \angle ACB$$
$$BC = CB$$
$$\angle ACB = \angle ABC$$

entonces los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ACB$ son congruentes por el criterio de congruencia ALA. Por lo tanto se cumple $AB = AC$ ■

Nota *El teorema del triángulo isósceles y su recíproco plantean preguntas acerca de cómo se relacionan los lados con ángulos desiguales, y existen teoremas útiles para este caso.*

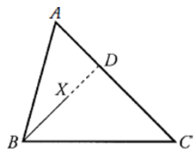
Teorema 1.4 (La desigualdad del lado del ángulo)

En un triángulo $\triangle\ ABC$, si $\angle\ ABC\ >\ \angle\ ACB$, entonces $AC\ >\ AB$.



♡

Demostración Dibuja un rayo BX de modo que $\angle\ CBX \equiv\ \angle\ BCA$ con X al mismo lado de BC que A, como se muestra en la figura.



Dado que $\angle\ ABC\ >\ \angle\ CBX$, el punto X es interior a $\angle\ ABC$ y entonces BX cortará el lado AC en un punto D. Entonces tenemos $DB = DC$ por lo reciproco del teorema del triángulo isósceles.
Por la desigualdad del triángulo, tenemos

$$AB < AD + DB$$

Y combinar los resultados nos da

$$AB < AD + DC = AC,$$

■

Comentario El recíproco de la Desigualdad del lado del ángulo también es cierto. Tenga en cuenta que la prueba del recíproco usa el enunciado del teorema original. Esto es algo que frecuentemente ocurre cuando se prueba que el recíproco es cierto.

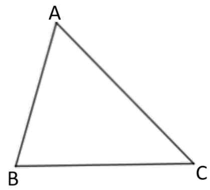
Teorema 1.5 (Recíproco de la desigualdad del lado del ángulo)

En un triángulo $\triangle\ ABC$, si $AC > AB$ entonces

$$\angle\ ABC > \angle\ ACB$$

♡

Demostración Sea ABC un triángulo tal que $AC > AB$



Hay tres casos posibles a considerar:

- $\angle ABC = \angle ACB$
- $\angle ABC < \angle ACB$
- $\angle ABC > \angle ACB$

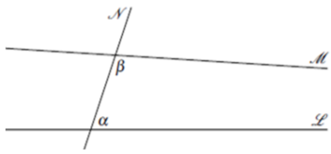
Si surge el caso (1), entonces $AC = AB$ por el recíproco al teorema del triángulo isósceles, de modo que el caso (1) no puede de hecho surgir.
Si surge el caso (2), entonces $AC < AB$ por la desigualdad del lado del ángulo, por lo que (2) no puede surgir.
Por tanto, la única posibilidad es el caso (3).■

1.2 Líneas paralelas

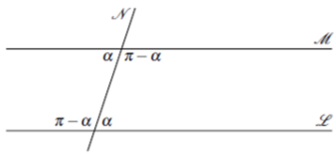
Axioma 1.3 (Axioma de las paralelas de Euclides)

Si una línea recta que cruza dos líneas rectas hace que los ángulos interiores de un lado juntos sean menores que dos ángulos rectos, entonces las dos líneas rectas se encontrarán en ese lado. ♡

la situación descrita por el axioma de las paralelas de Euclides, que es lo que sucede cuando las dos líneas no son paralelas. Si $\alpha + \beta$ es menor que dos ángulos rectos, entonces L y M se encuentran en algún lugar a la derecha.



De ello se deduce que si L y M no se encuentran en ninguno de los lados, entonces $\alpha + \beta = \pi$. En otras palabras, si L y M son paralelos, entonces α y β juntos forman un ángulo recto y los ángulos formados por L, M y N son como se muestra en la Figura



También se deduce que cualquier línea que atraviese la intersección de N y M, al no encontrarse con L, hace que el ángulo $\pi - \alpha$ con N. Por lo tanto, esta línea es igual a M. Es decir, si existe un paralelo a L a través de un punto dado, es único.

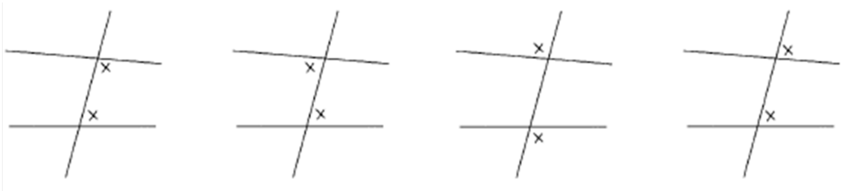
Definición 1.1 (Líneas paralelas)

Dos líneas en el plano son paralelas si

- *Las líneas no se intersectan*
- *Son la misma línea*

Usamos $\ell \parallel m$ para denotar que las líneas ℓ y m son paraleas, en ocasiones usamos $\nparallel$ para denotar que las líneas no son paralelas.

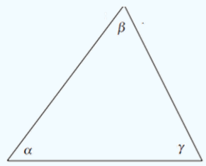
Cuando una transversal cruza dos líneas, varios pares de ángulos reciben nombres especiales.



1.3 Ángulos en triángulos

Proposición 1.1 (Suma de los ángulos internos de un triángulo)

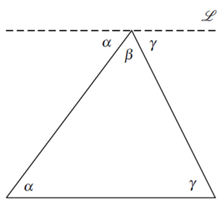
Si α, β y γ son los ángulos de un triángulo,



entonces

$$\alpha + \beta + \gamma = 180$$

Demostración Dado un triángulo dibujamos una recta L sobre uno de los vértices y paralela al lado opuesto



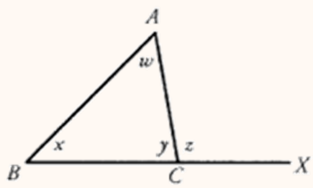
Entonces el ángulo a la izquierda debajo de L es alterno al ángulo α en el triángulo, por lo que es igual a α. Del mismo modo, el ángulo a la derecha debajo de L es igual a γ. Pero entonces el ángulo π debajo de L es igual a $\alpha + \beta + \gamma$ y por lo tanto

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

■

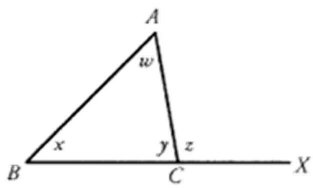
Teorema 1.6

En cualquier triángulo $\triangle ABC$ tenemos que el ángulo externo z, es igual a la suma de los ángulos internos no adyacentes x, w



♡

Demostración Considersmos a z, el ángulo externo al vértice C.



Tenemos que $z + \angle\, ACB = 180$, por ser suplementarios. Por lo tanto, como la suma de los ángulos internos del triángulo también es 180, tenemos

$$\angle\, CBA + \angle\, BAC + \angle\, ACB = z + \angle\, ACB$$

de donde

$$z = \angle\, CBA + \angle\, BAC = x + w$$

.

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Justifique los siguiente: Si a,b y c son números positivos tales que $a + c > b$, $a + b > c$ y $c + b > a$, entonces existe un triángulo de lados a, b y c