Facultad de Ciencias UNAM

GEOMETRÍA MODERNA

Notas del curso Geometría Moderna 1

Unidad 2

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 2. Circunferencia y cuadriláteros cíclicos

1.1 Ejes Radicales

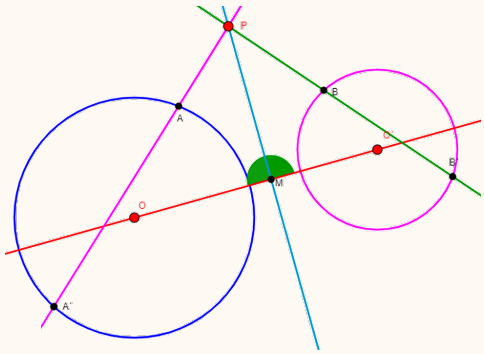
En esta parte se trata con cierta familia de circunferencias. La propiedad que define a la familia de circunferencias es que existe un punto en el plano tal que la potencia de ese punto con respecto a todas las circunferencias de la familia es la misma, es decir, que el valor de la potencia es constante.

Definición 1.1 (Eje radical de dos circunferencias)

Suponga que se nos dan dos círculos C_1 y C_2. El lugar geométrico de los puntos cuyas potencias con respecto a los dos círculos son iguales se llama ***eje radical*** *de los círculos C_1 y C_2* ♣

Teorema 1.1

El lugar geométrico de los puntos P que tienen la misma potencia con respecto a dos circunferencias que no se intersectan, es una línea perpendicular a la línea de los centros de las circunferencias.



♡

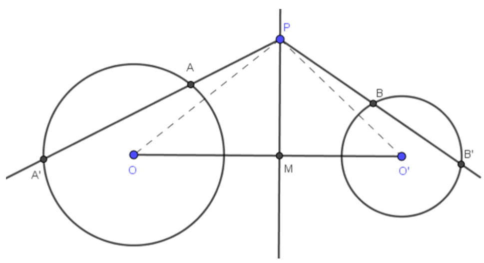
Demostración Como el punto P tiene la misma potencia con respecto a ambas circunferencias, se tiene

$$PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$$

por tanto

$$PO^2 - R^2 = PO' - R'^2 \tag{1.1}$$

Por P se dibuja PM la línea perpendicular a la línea de los centros (M la intersección de la perpendicular con la línea de los centros de las circunferencias desde P)



En el triángulo rectángulo POM se tiene

$$PM^2 + OM^2 = PO^2 \tag{1.2}$$

En el triángulo rectángulo PO'M se tiene

$$PM^2 + O'M^2 = PO'^2 \tag{1.3}$$

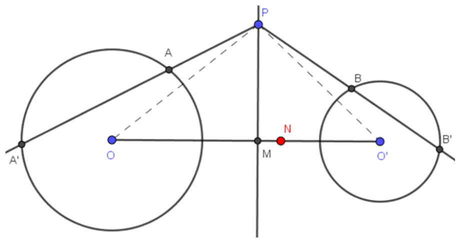
sustituyendo en (1,1), (1,2) y (1,3) se tiene

$$PM^2 + OM^2 - R^2 = PM^2 + O'M^2 - R'^2$$

por tanto

$$OM^2 - R^2 = O'M^2 - R'^2$$

esto significa que M es potencia de ambas circunferencias.
Si N es punto que se encuentra sobre la línea de los centros y a la derecha de M,



se tiene suponiendo que es potencia de ambas circunferencias

$$\begin{aligned} ON^2 - R^2 &= (OM + MN)^2 - R^2 \\ &= OM^2 + 2OM \cdot MN + MN^2 - R^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O'N^2 - R'^2 &= (O'M - MN)^2 - R'^2 \\ &= O'M^2 + 2O'M \cdot MN + MN^2 - R'^2 \end{aligned}$$

Dado que

$$ON^2 - R^2 = O'N^2 - R'^2 \quad y \quad OM^2 - R^2 = O'M^2 - R'^2$$

se tiene

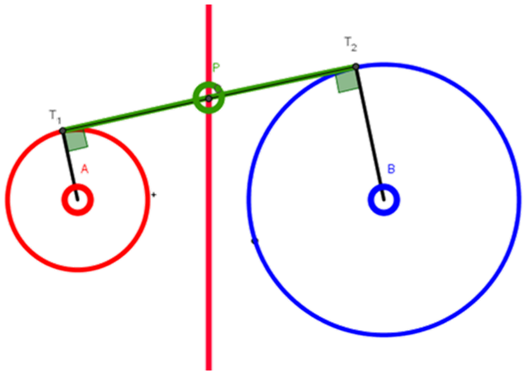
$$OM^2 + 2OM \cdot MN + MN^2 - R^2 = O'M^2 - 2O'M \cdot MN + MN^2 - R'^2$$

por tanto

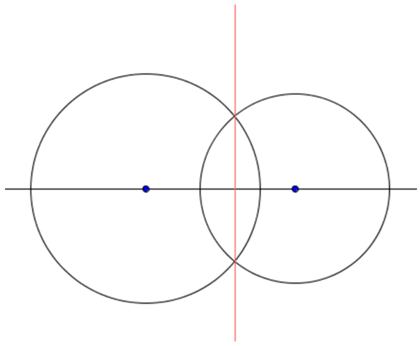
$$\begin{aligned} OM^2 + 2OM \cdot MN - R^2 =& O'M^2 - 2O'M \cdot MN - R'^2 \\ 2OM \cdot MN =& -2O'M \cdot MN \\ OM \cdot MN =& O'M \cdot MN \\ MN(OM + O'M) =& 0 \end{aligned}$$

esto significa que $MN = 0$ ó $OM + O'M = 0$, de esto último sólo puede ocurrir $MN = 0$ y por tanto $M = N$. ■

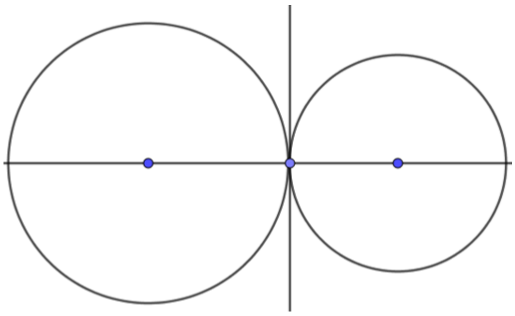
Lo que prueba que M es el único punto del lugar geométrico que está en la línea de los centros. De donde se demuestra que todo punto que tenga la misma potencia con respecto a dos circunferencias está en la recta perpendicular, por el punto M, a la línea de los centros de dichas circunferencias. A esa perpendcular se le conoce como **eje radical** de las circunferencias cuyos centros son O y O' y cuyos radios son r y r'; puesto que la potencia de un punto P del plano respecto de una circunferencia dada es igual al cuadrado de la longitud de la tangente trazada desde el punto a la circunferencia, entonces los puntos medios entre los puntos de contacto de las tangentes comunes a dos circunferencias, siempre pertenecerán al eje radical es éstas.



En el caso que las circunferencias se intersecten, como los puntos de intersección tienen potencia cero para ambas circunferencias, se tiene que estos puntos forman parte del lugar geométrico, por lo que en este caso el **eje radical** pasa por los puntos de intersección de las circunferencias.

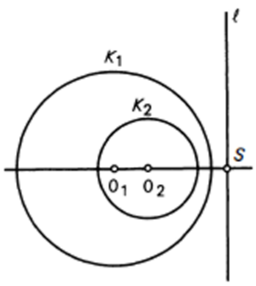


En el caso de que las circunferencias sean tangentes, entonces su eje radical es la línea tangente común



La potencia del punto de intersección de las circunferencias es cero, por tanto, el eje radical pasa por el punto de intersección, y dado que el eje radical es perpendicular a la línea de centros $0_1, 0_2$, debe coincidir con la tangente común de C_1 y C_2 en el punto de intersección.
Si el círculo K_2 se encuentra dentro del círculo K_1. En este caso, $r_1 - r_2 \geq O_1O_2$, así que

$$k = r_1^2 - r_2^2 = (r_1 + r_2)(r_1 - r_2) > (O_1O_2)^2$$



Así, el punto S (en el que el eje radical se cruza con la línea de centros) se encuentra a la derecha de 0_2 (como se muestra en la figura), y satisface

$$(O_1S + O_2S)(O_1O_2) = k$$

Haciendo $O_1O_2 = c$, esto se convierte en $O_1S + O_2S = \frac{k}{c}$. Dado que S se encuentra a la derecha de O_2, $O_1S = O_1O_2 + O_2S = c + O_2S$, y la ecuación anterior se convierte en

$$c + 2O_2S = \frac{k}{c}$$

o

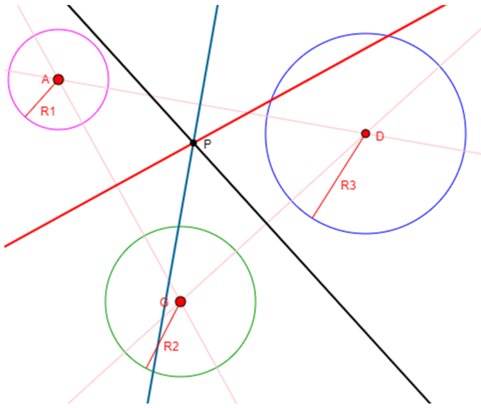
$$O_2S = \frac{k}{2c} - \frac{c}{2}$$

Como k es construible a partir de r_1, r_2 y c se da, la longitud 0_2S es construible; dado que la línea 0_10_2 y el punto 0_2 son fijos, sigue que el punto S (y por tanto la recta ℓ) es construible. En este caso, el eje radical ℓ se encuentra fuera del círculo K_1 y, por lo tanto, de ambos circulos y K_2 se encuentran a un lado de ℓ.

Teorema 1.2 (Eje radical de tres circunferencias)

Los ejes radicales de tres circunferencias, tomadas por pares, son concurrentes.

Demostración Sea P la intersección del eje radical de la primera $c_1(A, R_1)$ y la segunda $c_2(G, R_2)$, con el eje radical de la segunda $c_2(G, R_2)$ y tercera $c_3(D, R_3)$



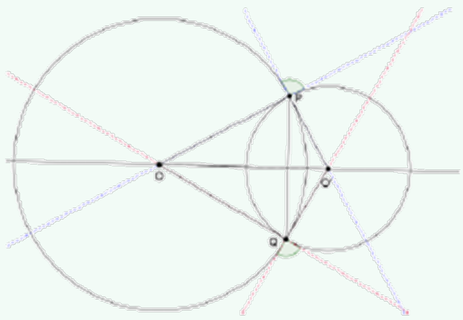
según los resultados anteriores

$$PA^2 - R_1^2 = PG^2 - R_2^2$$
$$PG^2 - R_2^2 = PD^2 - R_3^2$$

se tiene entonces $PA^2 - R_1^2 = PD^2 - R_3^2$ Por lo tanto, P tiene potencias iguales con respecto a las tres circunferencias, y entonces el eje radical de la primera y tercera también pasa por P. ■

Definición 1.2 (circunferencias ortogonales)

Dos circunferencias son ortogonales si su ángulo de intersección es recto; esto es, si sus radios a los puntos de intersección son perpendiculares y cada uno de ellos es tangente a la otra circunferencia.



♣

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Demuestre lo siguiente: Una circunferencia ortogonal a dos circunferencias dadas tiene su centro en el eje radical de las dos circunferencias.