Facultad de Ciencias UNAM

GEOMETRÍA MODERNA

Notas del curso Geometría Moderna 1

Unidad 3

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

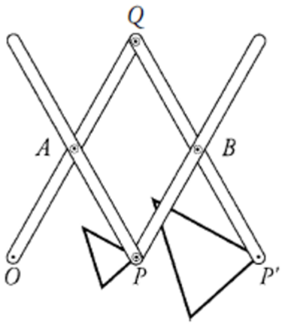
Índice general

Capítulo 1 Unidad 3. Introducción a la geometría moderna

1.1 Homotecia

Pantografo

Un pantógrafo está formado por cuatro varillas planas delgadas de igual longitud que están unidas por cuatro pasadores de bisagra P, Q, A y B de modo que AP BQ es un paralelogramo y OA = AP. El instrumento queda plano sobre el tablero de dibujo y se fija al tablero en el punto de pivote O. Los lápices se fijan al instrumento en los puntos P y P'.



Si se desea una ampliación, se usa el lápiz en P para trazar la característica original. Mientras se hace esto, el lápiz en P' dibuja una copia magnificada por un factor igual a $\frac{OQ}{OA}$. Si se desea una reducción, el lápiz en P' se usa para trazar la figura de modo que el lápiz en P dibuje la copia reducida.
Para ver por qué funciona esto, tenga en cuenta que $\triangle\, OAP$ y $\triangle\, OQP'$ son triángulos semejantes por el criterio LAL. De ello se deduce que O, P y P 'son colineales. Además,

$$\frac{OP'}{OP} = \frac{OQ}{OA}$$

y así, la figura trazada por P puede considerarse una çontracción"hacia O de la figura trazada por P'. Cabe señalar que el factor de aumento $\frac{OQ}{OA}$ hasta el pantógrafo ilustrado en la figura anterior es fijo. En un pantógrafo real, las posiciones de los pasadores de bisagra en A y B pueden ajustarse para que $\frac{OQ}{OA}$ se pueda configurar como se desee. Los pines A y B deben ajustarse de tal manera que AP BQ siga siendo un paralelogramo y de manera que OA = AP.

Homotecia

Una semejanza en la que una figura se contrae hacia un punto o se expande lejos de un punto de esta manera se llama **homotecia**.

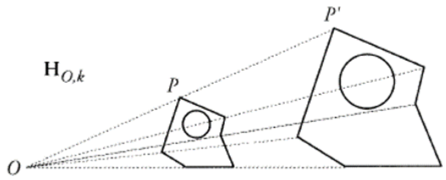
Definición 1.1

Sea O un punto y sea k un número real distinto de cero. La ***homotecia*** *centrada en O con razón k, denotada por $H_{o,k}$, mapea O a O y cada punto $A \neq O$ a otro punto A'en la línea OA tal que*

$$OA' = kOA$$

♣

Como $k \neq 0$, se deduce que $H_{o,k}$ es una transformación, y su inverso se ve fácilmente como $H_{o,\frac{1}{k}}$.



Comentario En estas notas, la palabra paralelo incluye el caso en el que coinciden dos líneas. En otras palabras, se considera que dos líneas son paralelas si hay una traslación que se mapea una sobre la otra, incluida una traslación a través de una distancia de magnitud cero. Además, la notación AB se usa para denotar el segmento dirigido de A a B.

Teorema 1.1

Sean A y B dos puntos cuyas imágenes bajo la homotecia $H_{o,k}$ son A 'y B', respectivamente. Entonces A'B' es paralelo a AB y A'B' = kAB.

♡

Demostración Se hara por casos

- Caso 1. O, A y B son colineales. En este caso $A'B'$ y AB ambos estan contenidos en la linea OA, por lo que son paralelos. Además,

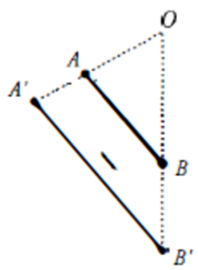
$$A'B' = OB' - OA' = k\,OB - k\,OA = k\,AB$$

- Caso2. O,A y B no son colineales.

Si los puntos O, A y B no estan en una línea, entonces el ángulo $\angle\, O$ es común a los triángulos $\triangle\, OA'B'$ y $\triangle\, OAB$. Por lo tanto

$$OA' = k\,OA, \quad y \quad OB' = k\,OB$$

ya que los triángulos son semejantes (LAL).



por lo que $A'B' = k\ AB$

Se sigue entonces que los segmentos $A'B'$ y AB son paralelos. ■

Corolario 1.1

Sea A', B' y C' las imagenes de A, B y C, respectivamente, bajo la homotecia

- *Si B esta entre A y C, entonces B' esta entre A' y C'*
- *Si A, B y C son los vértices de un triángulo, entonces A', B' y C' son los vértices de un triángulo similar.*

♡

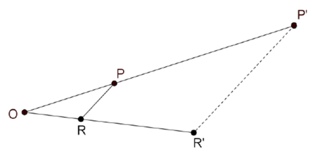
Demostración Supongamos que la homotecia es $H_{O,k}$

- Por la desigualdad del triángulo, $AC = AB + BC$. Por el teorema anterior se tiene que
$$A'C' = |k|\ AC = |k|(Ab + BC) = |k|\ AB + |k|\ BC = A'B' + B'C'$$
y así por la desigualdad del Triángulo, B' debe estar entre A' y C'.
- Por el teorema anterior
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = |k|$$
y los triángulos son similares por (LLL).

■

Una homotecia conserva cualquier relación geométrica que pueda caracterizarse completamente por razones de distancias. Por ejemplo, puntos medios, centroides y bisectrices de ángulo todos pueden caracterizarse por relaciones de distancia. Esto significa que el punto medio de BC es mapeado al punto medio de B'C', el centroide de $\triangle\ ABC$ se mapea al centroide de $\triangle\ A'B'C'$, y la bisectriz de $\angle\ ABC$ se asigna a la bisectriz de $\angle\ A'B'C'$. Todos estos hechos se pueden probar usando el Teorema anterior y el Corolario anterior. Por ejemplo, aquí hay una prueba de que el punto medio M de BC se asigna al punto medio M' de B'C' por la homotecia $H_{o,k}$.
El corolario anterior nos dice que B', C' y M 'son colineales. Además, según el teorema anterior,
$$B'M' = k\ BM \quad y \quad B'C' = k\ BC$$
así que
$$\frac{B'M'}{B'C'} = \frac{BM}{BC} = \frac{1}{2}$$
Por tanto, la imagen M' de M es de hecho el punto medio de B'C '.

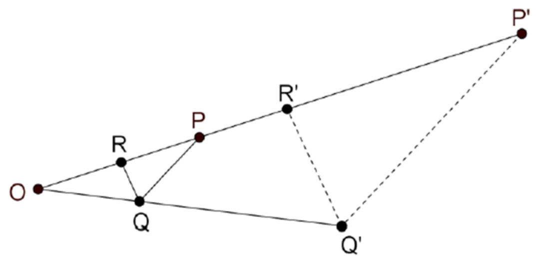
Construcción Dados el centro de homotecia y el homotético de un punto cualquiera en el plano es posible determinar el homotético de cualquier otro punto del plano.



Sea O el centro de homotecia, P un punto en el plano y P' su transformado bajo una homotecia con centro en O y constante de homotecia k. Se tiene que O, P y P' son colineales. Para determinar el homotético de un punto cualquiera R que no está en la recta OP se trazan las rectas OR y PR. Por el punto P' se traza la paralela a PR. Sea R' la intersección de esta paralela con la recta OR, entonces $OR' = kOR$ como se verá a continuación.
Se tiene que que O, P y P' son colineales y
$$\frac{OP'}{OP} = k$$
Además, ya que PR es paralelo a P'R', por Thales se tiene
$$\frac{OR'}{OR} = k$$

y ya que también O, R y R' son colineales por construcción, se tiene $kOR = OR'$

Construcción En el caso en que R esté en la recta O, P y P', se construye el homotético de un punto cualquiera Q que no esté en la recta y después se procede como en el anterior caso.



Homotecia y Círculos

Teorema 1.2 (Homotecia y círculos)

La imagen de un círculo $\mathcal{C}$ con centro C y radio r bajo de la homotecia $H_{O,k}$ es un círculo con centro $D = H_{O,k}(C)$ y radio $|k|\ r$. ♡

Demostración La homotecia mapea cada punto X de C a un punto Y tal que

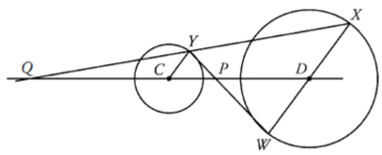
$$DY = |k|\ CX = |k|\ r$$

entonces los puntos Y forman un círculo centrado en D con radio $|k|\ r$. ■

Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son dos círculos, el centro de cualquier homotecia que transforme un círculo en otro se llama **centro de similitud**.

Ejemplo 1.1 Dados dos círculos con dos centros diferentes y dos radios diferentes, explique cómo construir todos los centros de similitud para los círculos.

Solución *El proceso se ilustra en la figura siguiente.*



- *Construya cualquier diámetro de uno de los círculos, digamos W X.*
- *Luego construya un radio CY del otro círculo que es paralelo a este diámetro.*
- *Los puntos P y Q, donde las líneas WY y XY intersecan la línea CD a través de los centros de los círculos, será el centro de similitud.*
- *No hay más centros de similitud para estos dos círculos, porque si O es un centro de similitud, entonces O debe estar en la línea CD, y la homotecia $H_{O,k}$ que lleva C a D debe transformar el radio CY en un radio paralelo, ya sea DW o DX. Esto deja solo dos posibles ubicaciones para O.*

■

Teorema 1.3 (Centro de similitud)

Sea P un punto en la línea que une los centros A_1 y A_2 de dos círculos con radios r_1 y r_2, respectivamente. Si

$$\frac{PA_1}{PA_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

entonces P es un centro de similitud de los círculos. ♡

Demostración Teniendo en cuenta que hay como máximo sólo dos puntos Pon A_1 A_2 tales que

$$\frac{PA_1}{PA_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

Para uno de ellos la relación.

$$\frac{PA_1}{PA_2}$$

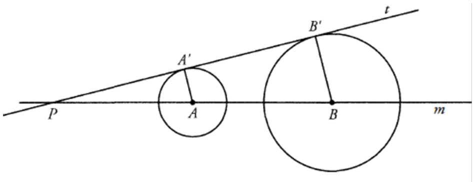
es positiva, para el otro es negativa. Dejando

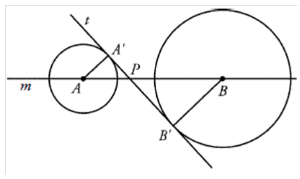
$$k = \frac{PA_1}{PA_2}$$

vemos que la homotecia $H_{P,k}$ mapea el círculo centrado en A_1 con el círculo centrado en A_2. ■

Ejemplo 1.2 Demuestre que cualquier tangente común a dos círculos de radios desiguales pasa por un centro de similitud.

Solución *La tangente t no puede ser paralela a la línea m que une los centros A y B. Suponga que t se encuentra con m en P. Sean A 'y B' los puntos de tangencia, como en figura siguiente.*





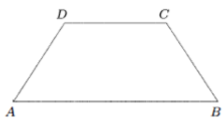
Luego $\triangle\, PA'A \sim \triangle\, PB'B$ *por (AAA). En consecuencia*

$$\frac{PA}{PB} = \frac{AA'}{BB'}$$

y del teorema anterior se sigue que P es un centro de similitud. ■

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Encuentre los dos centros de homotecia para la parte superior e inferior de un trapezoide isósceles



2. Dadas dos circunferencias C(A,a) y C(B,b) de radios distintos. Pruebe que cada tangente común pasa por un centro de homotecia.