GEOMETRÍA MODERNA

Notas del curso Geometría Moderna 1

Unidad 1

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 1. Geometría del triángulo

1.1 Ortocentro, Baricentro

1.2 Alturas de un triángulo

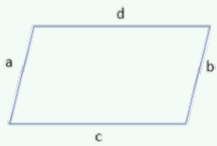
Definición 1.1 (Altura de un triángulo)

Una línea que pasa por un vértice de un triángulo perpendicular al lado opuesto se llama altura del triángulo.

Para probar que las alturas de un triángulo son concurrentes, necesitamos algunos datos sobre paralelogramos.

Definición 1.2 (Paralelogramo)

El ***paralelogramo*** *es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos.*

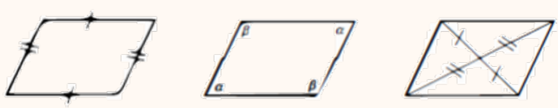


Comentario Un paralelogramo cuyos lados son iguales en longitud se llama rombo. Los cuadrados y los rectángulos son especiales tipos de paralelogramos.

Teorema 1.1 (Propiedades del Paralelogramo)

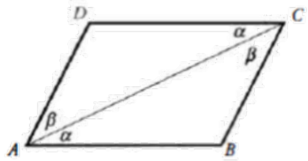
En un paralelogramo:

1. *Los lados opuestos son congruentes.*
2. *Los ángulos opuestos son congruentes.*
3. *Las diagonales se bisecan entre sí.*

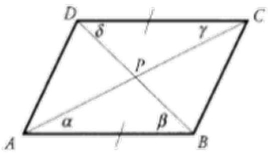


Demostración Demostraremos (1) y (2). Dado el paralelogramo ABCD, como en la figura a continuación, mostraremos que $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$.

Diagonal AC es una transversal para líneas paralelas AB y CD, por lo que $\angle BAC$ y $\angle DCA$ son ángulos interiores opuestos para las líneas paralelas. Entonces tenemos $\angle BAC = \angle DCA$.
Tratando AC como transversal para AD y CB, tenemos $\angle BCA = \angle DAC$



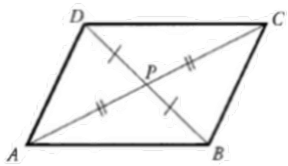
Dado que AC es común a $\triangle BAC$ y $\triangle DCA$, el criterio ALA implica que son congruentes. En consecuencia, $AB = CD$ y $BC = DA$.
Además, $\angle BAD = \alpha + \beta = \angle BCD$ y $\angle ADC = \angle ABC$ porque los triángulos $\triangle ADC$ y $\angle ABC$ son congruentes.
Para (3) en la figura



En los triángulos $\triangle ABP$ y $\triangle CDP$ tenemos $\alpha = \gamma$ y $\beta = \delta$ porque $AB \parallel CD$, y $AB = CD$ por el enunciado (1) del teorema. Entonces, $\triangle ABP = \triangle CDP$ por ALA, y se sigue que $AP = CP$ y $BP = DP$ ■

Teorema 1.2 (Diagonales de un paralelogramo)
Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo. ♡

Demostración En la figura



En los triángulos $\triangle ABP$ y $\triangle CDP$ tenemos

$$AP = CP,$$
$$\angle APB = \angle CPD$$

ya que son ángulos verticalmente opuestos, y $BP = DP$.
Entonces, los triángulos $\triangle ABP$ y $\triangle CDP$ son congruentes y, por lo tanto, $\angle PAB = \angle PCD$, lo que implica que $AB \parallel CD$.
De manera similar, $AD \parallel CB$, que muestra que ABCD es un paralelogramo. ■
Comentario El teorema 0.2 nos dice que el enunciado (3) del teorema 0.1 garantizará que el cuadrilátero es un paralelogramo. Sin embargo, ni la afirmación (1) ni la afirmación (2) de El teorema 0.1 es suficiente por sí mismo para garantizar que un cuadrilátero es un paralelogramo. Por ejemplo, un cuadrilátero no simple cuyos

lados opuestos son congruentes no es un paralelogramo. Sin embargo, si el cuadrilátero es un polígono simple, entonces la afirmación (1) o (2) es suficiente. Además, hay otra condición útil que puede ayudar a determinar si un cuadrilátero simple es un paralelogramo:

Teorema 1.3 (Cuadriláteros y Paralelogramos)

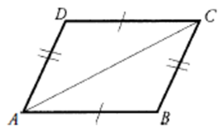
Un cuadrilátero simple es un paralelogramo si alguna de las siguientes afirmaciones es cierta:

1. *Los lados opuestos son congruentes.*
2. *Los ángulos opuestos son congruentes.*
3. *Un par de lados opuestos es congruente y paralelo.*

♡

Demostración Justificaremos el caso (1), dejando los demás al estudiante.

Suponga que $\square\, ABCD$ es el cuadrilátero, como en la figura de la derecha. Dado que $\square\, ABCD$ es simple, podemos suponer que la diagonal AC es interior al cuadrilátero. Dado que los lados opuestos del cuadrilátero son congruentes, la condición de congruencia LLL implica que $\triangle\, ABC = \triangle\, CDA$.



Esto a su vez implica que los ángulos alternos internos $\angle\, BAC$ y $\angle\, DCA$ son congruentes y también que los ángulos alternos internos $\angle\, BCA$ y $\angle\, DAC$ son congruentes. El hecho de que los bordes son paralelos ahora se sigue de los hechos bien conocidos sobre líneas. ■

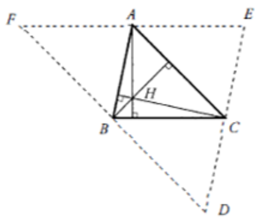
El siguiente teorema utiliza un truco ingenioso. Incrusta el triángulo dado en uno más grande de tal manera que las altitudes del triángulo dado son bisectrices rectas de los lados del más grande.

Teorema 1.4 (Concurrencia de Alturas)

Las alturas de un triángulo son concurrentes.

♡

Demostración Dado $\triangle\, ABC$, lo incrustamos en un triángulo más grande $\triangle\, DEF$ dibujando líneas a través de los vértices de $\triangle\, ABC$ que son paralelas a los lados opuestos, de modo que $\square\, ABCE$, $\square\, ACBF$ y $\square\, CAED$ son paralelogramos, como en la figura.



Claramente, A, B y C son puntos medios de los lugares de $\triangle\, DEF$, y una altitud de $\triangle\, ABC$ es una bisectriz perpendicular de un lado de $\triangle\, DEF$. Sin embargo, dado que las bisectrices perpendiculares de $\triangle\, DEF$ son concurrentes, también lo son las altitudes de $\triangle\, ABC$. ■

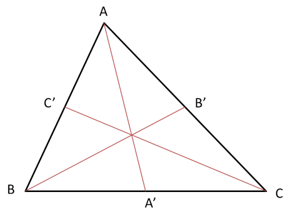
Al punto de concurrencia de las alturas le llamamos **ortocentro**

1.3 Baricentro de un triángulo

Definición 1.3 (Medianas de un triángulo)

En un triángulo los segmentos que van de un vértice al punto medio del lado opuesto se llaman medianas. ♣

Si $A'B', C'$ son los puntos medios de BC, CA, AB respectivamente, las medianas son AA', BB' y CC'

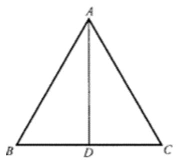


Proposición 1.1

En un triángulo equilátero $\triangle\ ABC$ los siguientes son todos lo mismo:

1. *La mediatriz del lado BC.*
2. *La bisectriz del ángulo $\angle\ A$*
3. *La altitud desde el vértice A.*
4. *La mediana que pasa por el vértice A.* ♠

Demostración En la figura



Mostraremos que la recta que pasa por el vértice A y el punto medio D de BC es simultáneamente la mediatriz de BC, la bisectriz de $\angle\ A$, la altitud de A y la mediana de A.

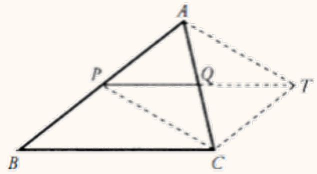
1. Como $AB = AC$, el punto A es equidistante de B y C, por lo que A está en la mediatriz de BC. De ello se deduce que AD es la mediatriz de BC.
2. Los triángulos $\triangle\ ADB$ y $\triangle\ ADC$ son congruentes por LLL, entonces $\angle\ DAB = \angle\ DAC$; es decir, AD es la bisectriz de $\angle\ A$.
3. Como $AD \perp BC$, según el enunciado 1 anterior, AD es una altitud de $\triangle\ ABC$.
4. Dado que D es el punto medio de BC, AD es una mediana de $\triangle\ ABC$.

■

El siguiente teorema, que es útil en muchas ocasiones, también se demuestra usando las propiedades de un paralelogramo.

Teorema 1.5 (El teorema de la línea media)

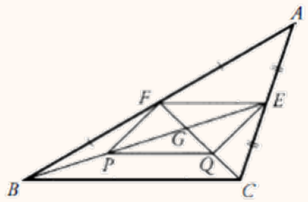
Si P y Q son los puntos medios respectivos de los lados AB y AC del triángulo $\triangle ABC$*, entonces PQ es paralelo a BC y* $PQ = \frac{BC}{2}$.



Demostración Primero, extienda PQ a T de modo que $PQ = QT$, como en la figura. Entonces $\square\, ATCP$ es un paralelogramo, porque las diagonales se bisecan entre sí. Esto significa que TC es paralelo y congruente con AP. Dado que P es el punto medio de AB, se deduce que TC es paralelo y congruente con BP, por lo que $\square\, TCBP$ es también un paralelogramo. De esto podemos concluir que PT es paralelo y congruente con BC; es decir, PQ es paralelo a BC y la mitad de la longitud de BC. ■

Lema 1.1 (Propiedad de las medianas)

Cualesquiera dos medianas de un triángulo se trisectan entre sí en su punto de intersección.



Demostración Se tiene que las medianas BE y CF se cruzan en G, como se muestra en la figura. Dibujar FE. Según el teorema de la línea media, FE es paralelo a BC y tiene la mitad de su longitud.
Sea P el punto medio de GB y Q sea el punto medio de GC. Luego, de nuevo por el teorema de la línea media, PQ es paralelo a BC y la mitad de su longitud.
Como FE y PQ son paralelas e iguales en longitud, $\square\, EFPQ$ es un paralelogramo, por lo que las diagonales de $\square\, EFPQ$ se bisecan entre sí. De ello se deduce que $FG = GQ = QC$ y $EG = GP = PB$, que prueba el lema. ■

Comentario Hay dos puntos diferentes que trisecan un segmento de línea dado. El punto de intersección de las dos medianas es el punto de trisección de cada uno que está más alejado del vértice.

Teorema 1.6 (Concurrencia de las Medianas)

Las medianas de un triángulo son concurrentes.

Demostración Sean las medianas AD, BE y C F. Entonces BE y CF se encuentran en un punto G para el cual $\frac{EG}{EB} = \frac{1}{3}$. Además, AD y BE se encuentran en un punto G 'para el cual $\frac{EG'}{EB} = \frac{1}{3}$. Dado que tanto G como G' están entre B y E, debemos tener $G = G'$, lo que significa que las tres medianas son concurrentes. ■

El punto de concurrencia de las tres medianas se llama **centroide**. El **centroide** siempre se encuentra dentro del triángulo. Una placa triangular delgada se puede equilibrar en su centroide en la punta de una aguja, por lo que físicamente el centroide corresponde al centro de gravedad.
Los recíprocos parciales del teorema de la línea media son útiles:

Teorema 1.7

Sea P el punto medio del lado AB del triángulo $\triangle ABC$*, y sea Q un punto en AC tal que PQ es paralelo a BC. Entonces Q es el punto medio de AC.* ♡

Demostración Sea Q'el punto medio de AC, luego $PQ' \parallel BC$. Como solo hay una linea a través de P paralela a BC, las rectas PQ y PQ' deben ser iguales, por lo que los puntos Q y Q' también son iguales. ■

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Da ejemplos de triángulos donde:
   a) El ortocentro está en un lado del triángulo.
   b) El ortocentro es exterior al triángulo.
2. En un triángulo $\triangle ABC$ la mediana $m_a = AA'$ satisface $m_a > \frac{1}{2}a$. Muestre que $\angle BAC$ es agudo