Facultad de Ciencias UNAM

GEOMETRÍA MODERNA

Notas del curso Geometría Moderna 1

Unidad 1

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

1. Unidad 1. Geometría del triángulo **1**
1.1. Teorema de Pitágoras 1
1.2. Teorema de Stewart 3
Capítulo 1 Problemas para pensar 4

Capítulo 1 Unidad 1. Geometría del triángulo

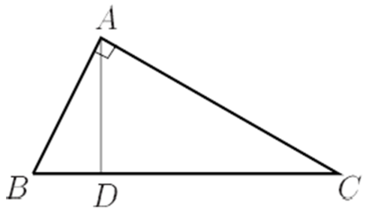
1.1 Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto se conoce como la **hipotenusa** y a los lados adyacentes al ángulo recto como los **catetos** del triángulo.

Lema 1.1

En un triángulo rectángulo la altura sobre la hipotenusa lo divide en dos triángulos semejantes a él. ♡

Demostración Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en el vértice A y sea AD la altura sobre la hipotenusa BC

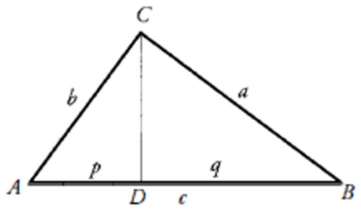


Tenemos que $\triangle\, ABC$ es semejante a $\triangle\, DBA$ ya que ambos son triángulos rectángulos y el ángulo $\angle\, ABC$ es común; también los triángulos rectángulos $\triangle\, ABC$ y $\triangle\, DAC$ son semejantes, en éstos el ángulo C es común. ■

Teorema 1.1 (Teorema de Pitágoras)

Si dos lados de un triángulo rectángulo tienen longitudes a y b y la hipotenusa tiene longitud c, entonces $a^2 + b^2 = c^2$ ♡

Demostración En la siguiente figura, trazamos CD la perpendicular a la hipotenusa, y sea $AD = p$ y $BD = q$.



Se tiene la semejanza de los triángulos $\triangle\, CBD \sim \triangle\, ABC$ y $\triangle\, ACD \sim \triangle\, ABC$
esto implica que

$$\frac{a}{q} = \frac{c}{a} \quad y \quad \frac{b}{p} = \frac{c}{b}$$

esto es equivalente a

$$a^2 = cq \quad y \quad b^2 = cp$$

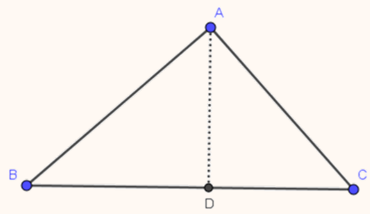
de lo que se sigue que

$$a^2 + b^2 = cq + cp = c(p + q)$$

y como $q + p = c$ tenemos que $a^2 + b^2 = c^2$ ■

Lema 1.2

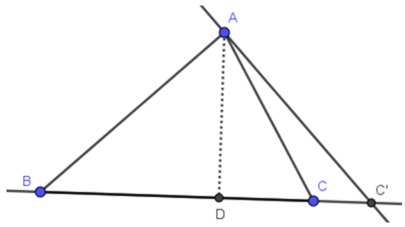
Sea $\triangle\ ABC$ *un triángulo con ángulos en B y C menores de 90 y sea D el pie de la altura de A sobre BC. Si* $AD^2 = BD \cdot DC$ *entonces* $\triangle\ ABC$ *es un triángulo rectángulo.*



♡

Demostración Tenemos que

1. Trazamos la perpendicular a AB por A
2. Ésta corta a BC en C'
3. ABC' es rectángulo



se tiene entonces que

$$AD^2 = BD \cdot DC'$$

y por hipótesis

$$AD^2 = BD \cdot DC$$

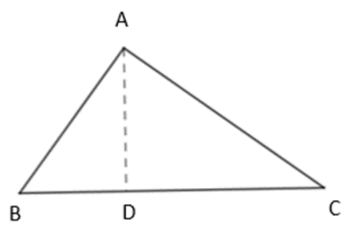
por tanto $DC = DC'$ y en consecuencia $C = C'$ y el triángulo $\triangle\ ABC$ es rectángulo. ■

Teorema 1.2 (Recíproco del Teorema de Pitágoras)

Si en un triángulo el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, el triángulo es rectángulo

♡

Demostración Supongamos que $\triangle\ ABC$ es un triángulo con $BC^2 = AB^2 + CA^2$



Notemos que $BC > AB$ $BC > CA$, los ángulos en B y C son menores a 90. Sea D el pie de la perpendicular de A sobre BC.

Los triángulos $\triangle\ ABD$ y $\triangle\ ADC$ son triángulos rectángulos con ángulo recto en D. Por el teorema de Pitágoras aplicado a éstos, tenemos

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 \quad y \quad CA^2 = AD^2 + DC^2$$

Por lo tanto

$$2AD^2 + BD^2 + DC^2 = AB^2 + CA^2 = BC^2 = (BD + DC)^2 = BD^2 + 2BD \cdot DC + DC^2$$

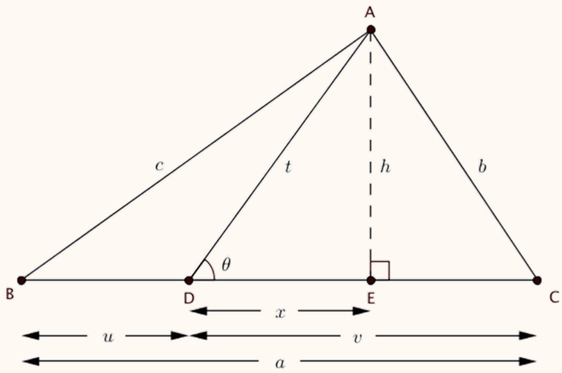
Al reducir tenemos que $AD^2 = BD \cdot DC$ entonces, por el lema anterior, tenemos el resultado. ■

1.2 Teorema de Stewart

En geometría, el teorema de Stewart produce una relación entre las longitudes de los lados y la longitud ceviana de un triángulo. Puede probarse a partir de la ley de los cosenos, así como por el famoso teorema de Pitágoras. Su nombre es en honor al matemático escocés Matthew Stewart, quien publicó el teorema en 1746 cuando se creía que era un candidato para reemplazar a Colin Maclaurin como profesor de matemáticas en la Universidad de Edimburgo.

Teorema 1.3 (Teorema de Stewart)

En un triángulo ABC, Sea D un punto en el lado BC, $AB = b$, $BD = u$, $DC = v$, $AD = t$. El teorema de Stewart establece que en este triángulo, la siguiente ecuación es válida:



$$t^2 = \frac{b^2u + c^2v}{u + v} - uv$$

♡

Demostración Según la figura, se tiene

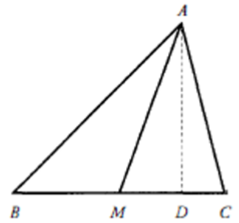
$$\begin{aligned} t^2 &= h^2 + x^2 \\ b^2 &= h^2 + (v - x)^2 \ \Rightarrow \ b^2u = h^2u + uv^2 - 2uvx + ux^2 \\ c^2 &= h^2 + (u + x)^2 \ \Rightarrow \ c^2v = h^2v + vu^2 + 2uvx + vx^2 \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} b^2u + c^2v &= h^2u + uv^2 - 2uvx + ux^2 + h^2v + vu^2 + 2uvx + vx^2 \\ &= (u + v)(h^2 + uv + x^2) \\ &= (u + v)(t^2 + uv) \\ &= a \cdot (t^2 + uv) \end{aligned}$$

■

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Pruebe lo siguiente: Sea M el punto medio del lado BC del triángulo $\triangle ABC$. Entonces
$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$$


2. Pruebe lo siguiente: Utilice el resultado anterior para demostrar que en $\triangle ABC$, si $m_a = AM$ es la mediana del vértice A, entonces
$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$
donde $a = BC$, $b = AC$, y $c = AB$ como se muestra en la figura