Facultad de Ciencias UNAM

GEOMETRÍA MODERNA

Notas del curso Geometría Moderna 1

Unidad 2

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

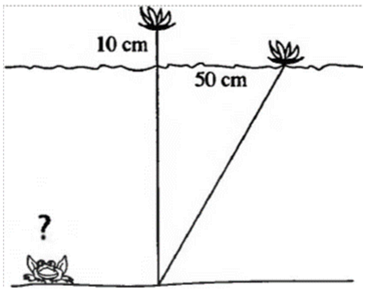
Índice general

Capítulo 1 Unidad 2. Circunferencia y cuadriláteros cíclicos

1.1 Potencia de un punto

¡El siguiente problema está tomado de AHA! Insight, un libro escrito por Martin Gardner. Gardner atribuye el problema a Henry Wadsworth Longfellow.

Un lirio flota en la superficie de un estanque lo más lejos posible de donde su raíz está unida al fondo. Si se saca del agua verticalmente, hasta que su tallo esté tenso, se puede levantar 1O cm fuera del agua. El tallo entra al agua a una distancia de 50 cm de donde originalmente flotaba el lirio. ¿Cuál es la profundidad del estanque?



Comentario La mayoría de los estudiantes ataca este problema utilizando el teorema de Pitágoras. Veremos que hay un enfoque mucho más elegante. Comenzamos con un dato valioso sobre la intersección de secantes y cuerdas.

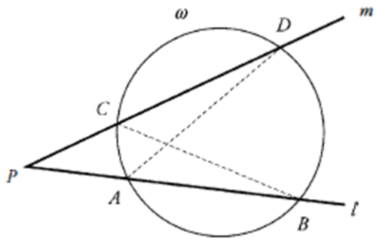
Teorema 1.1 (Propiedad de las cuerdas de una circunferencia)

Sea w una circunferencia. Sea P un punto en el plano, y sean l y m dos líneas por P que intersectan al circulo en los puntos A, B y C,D respectivamente, entonces

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

♡

Demostración Si P está fuera del círculo, suponga que A está entre P y B y que C está entre P y D. Consideramos los segmentos de línea AD y BC, y los triángulos $\triangle PAD$ y $\triangle PCB$.



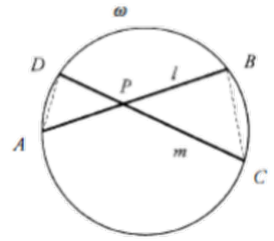
Según la figura se tiene $\angle PDA = \angle PBC$ y $\angle P$ es común, por el criterio AAA, se tiene que los triángulos son semejantes $\triangle PAD \sim \triangle PCB$. En consecuencia

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$$

Por tanto

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

Si P está dentro del círculo, considere nuevamente los segmentos de línea AD y BC.

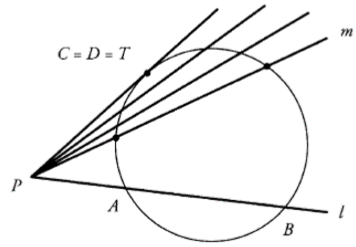


Entonces, triangulos $\triangle PDA$ y $\triangle PBC$ son semejantes, por lo que nuevamente tenemos

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

■

Cuando P está fuera del círculo, sucede algo interesante si movemos la línea secante PCD a una posición tangente, como en la figura.



En este caso, los puntos C y D se acercan y se fusionan en el punto T, por lo que el producto $PC \cdot PD$ se acerca a PT^2.

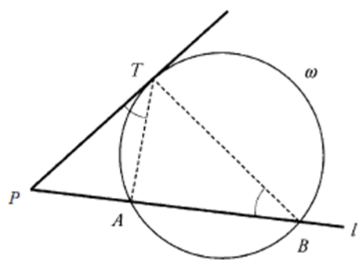
Teorema 1.2

Sea P un punto en el plano fuera de un círculo w. Sea PT tangente al círculo en T, y sea l una línea que pasa por P que se encuentra con el círculo en A y B. Entonces

$$PT^2 = PA \cdot PB$$

♡

Demostración Podemos suponer que A está entre P y B. Consideremos los segmentos TA y TB, y tenemos la siguiente figura.



Como una consecuencia de ángulos que abren el mismo arco en una circunferencia, se tiene $\angle PTA$ y $\angle PBT$ son iguales en tamaño, se sigue que $\triangle PTA \sim \triangle PBT$ y por tanto

$$\frac{PT}{PB} = \frac{PA}{PT}$$

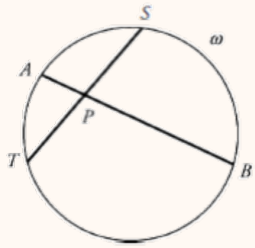
por lo que $PT^2 = PA \cdot PB$ ■

Si P está dentro del círculo, entonces, por supuesto, ninguna tangente al círculo pasa por P. Sin embargo, hay un resultado que se parece un poco al teorema anterior cuando P está dentro del círculo.

Teorema 1.3

Sea P un punto en el plano dentro de un círculo w. Sea TS un cuerda cuyo punto medio es P y sea AB cualquier otra cuerda que contenga P. Entonces

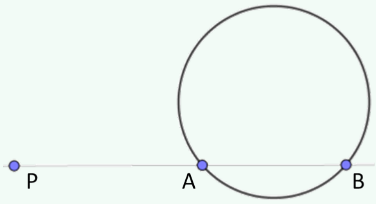
$$PT^2 = PA \cdot PB$$



♡

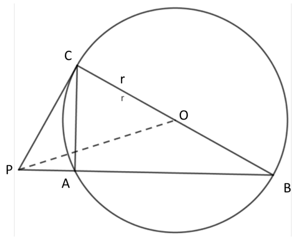
Definición 1.1 (Potencia de un punto)

Para un punto P, una circunferencia C y cualquier recta por P que corte C en puntos AB, si se tiene $PA \cdot PB$ es constante, a esta cantidad constante se le conoce como ***potencia*** *del punto P respecto a C.*



♣

Cuando el punto es exterior a la circunferencia, ya se ha establecido que el valor de la potencia de un punto exterior es igual al cuadrado de la longitud de una tangente a la circunferencia desde dicho punto.



Llamamos O al centro de la circunferencia C y radio r, tenemos por el teorema de pitágoras

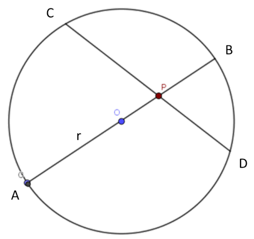
$$PC^2 + r^2 = PO^2$$

por lo que

$$PC^2 = PO^2 - r^2$$

Si P es un punto dentro de la circunferencia y AB es una cuerda por P, entonces la potencia de P es $PA \cdot PB$. Si pensamos PA y PB como segmentos dirigidos, tenemos que éstos tienen signos contrarios, por lo que la potencia es negativa y su magnitud la podemos calcular al trazar el diámetro por P, la magnitud de la potencia es

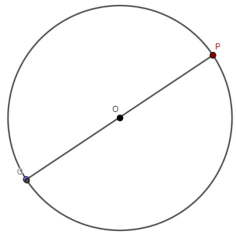
$$PA \cdot PB = (r + PO)(r - PO) = r^2 - PO^2$$



Así para este caso también la potencia resulta ser

$$PO^2 - r^2$$

Finalmente para un punto P sobre la circunferencia, sabemos que la potencia es cero, esto también coincide con



$$PO^2 - r^2$$

En conclusión podemos decir que la potencia de P con respecto a la circunferencia $C(O, r)$ es $PO^2 - r^2$. Y la potencia será positiva, negativa o cero dependiendo si P se encuentra fuera, sobre o dentro de la circunferencia.

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Resuelva el problema: Un lirio flota en la superficie de un estanque lo más lejos posible de donde su raíz está unida al fondo. Si se saca del agua verticalmente, hasta que su tallo esté tenso, se puede levantar 1O cm fuera del agua. El tallo entra al agua a una distancia de 50 cm de donde originalmente flotaba el lirio. ¿Cuál es la profundidad del estanque?