Facultad de Ciencias UNAM

GEOMETRÍA MODERNA

Notas del curso Geometría Moderna 1

Unidad 2

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

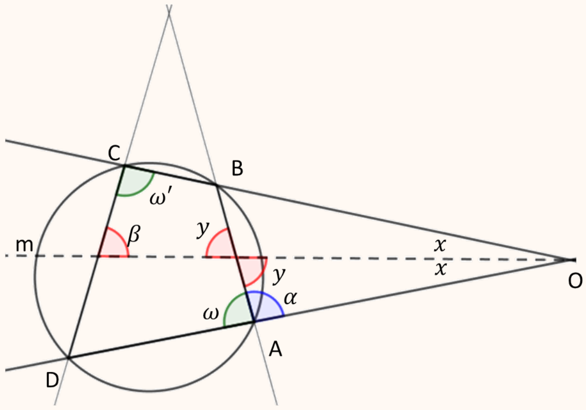
Índice general

Capítulo 1 Unidad 2. Circunferencia y cuadriláteros cíclicos

1.1 Antiparalelismo de pares de rectas como un criterio de ciclicidad para cuadriláteros

Teorema 1.1 (Criterio de antiparalelismo)

Los puntos en que dos pares de rectas antiparalelas se cortan mutuamente son concíclicos y, recíprocamente, los pares de lados opuestosvde un cuadrilátero cíclico forman pares de rectas antiparalelas.



♡

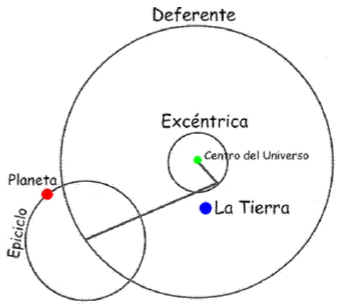
Comentario El caso de los trapezoides, en particular los trapecios y rectángulos, al tener pares de lados paralelos, no pareciera estar considerado en este teorema. Sin embargo, recordemos que la bisectriz de un ángulo es la recta equidistante de sus lados. En el caso de rectas paralelas la recta equidistante juega el papel de la bisectriz para rectas concurrentes. Con esto podemos redefinir antiparalelismo entre pares de rectas de tal forma que también se incluya el caso de paralelas:

Dos rectas son antiparalelas con respecto a otras dos si las primeras forman ángulos internos iguales con la recta equidistante de las otras dos.

Por otra parte, (con el ejemplo de los rombos) vemos que no es posible hallar un criterio de ciclicidad de puntos referente únicamente a los lados de un cuadrilátero. Sin embargo, el teorema que sigue (de Tolomeo) nos da un tercer criterio de ciclicidad de puntos referente a los lados y las diagonales de un cuadrilátero convexo.

1.2 Teorema de Ptolomeo

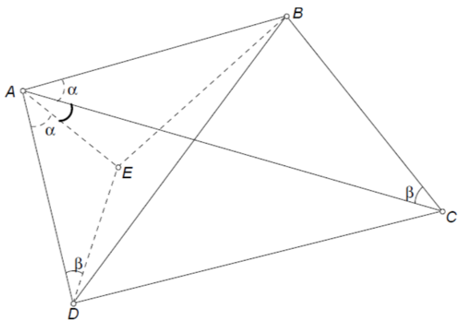
El teorema siguiente se debe a Claudio Ptolomeo, astrónomo y geógrafo griego de la Antigüedad (siglo II) y aparece en su obra principal conocida por su nombre árabe Almagesto.
El Almagesto es una enciclopedia del conocimiento astronómico de esa época, que establece la astronomía como una disciplina de las matemáticas.



Esta obra, contiene una elaborada teoría del movimiento de planetas que se movilizan en círculos (epiciclos) que rotan sobre la circunferencia de un círculo mayor cuyo centro se encuentra cercano a la Tierra (sistema geocéntrico). Aborda también la determinación de la distancia de la Luna a la Tierra, estudios sobre la esfera y trigonometría y un manual sobre la construcción y uso de los instrumentos astronómicos.

El teorema de Ptolomeo, que se verá a continuación, establece la condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea cíclico en término de sus lados y sus diagonales. Recuerde que se dice que un cuadrilátero es cíclico si es inscriptible, y se dice que sus vértices son concíclicos.

Ejercicio 1.1 Demuestre que según la figura, los triángulos $\triangle\ ABC$ y $\triangle\ AED$ son semejantes. Usando esto, demuestre que también los triángulos $\triangle\ ABE$ y $\triangle\ ACD$ lo son.



Solución

Llamamos δ al $\angle\ AED$ y γ a $\angle\ ABC$, por lo que tenemos en el triángulo $\triangle\ AED$

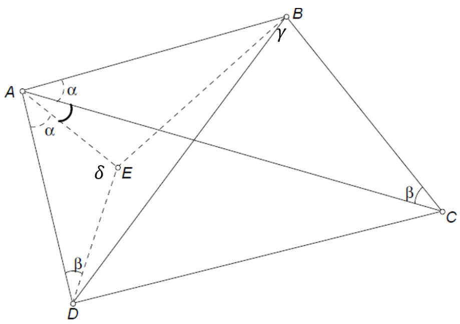
$$\alpha + \beta + \delta = 180$$

y en el triángulo $\triangle\ ABC$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180$$

por lo que $\delta = \gamma$ y por el criterio AAA los triángulos $\triangle\ ABC$ y $\triangle\ AED$ son semejantes, por lo que

$$\frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE}$$



de las relaciones anteriores tenemos

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$$

esto significa que en los triángulos $\triangle\ ABE$, $\triangle\ ACD$ los lados AB, AE son proporcionales con los lados AC, AD respectivamente, y como ambos triángulos comparten el ángulo entre dichos lados, por el criterio LAL, son semejantes.

De la primer semejanza se tiene

$$\frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow BC \cdot AD = AC \cdot DE \tag{1.1}$$

de la segunda semejanza

$$\frac{AB}{AC} = \frac{EB}{DC} \Rightarrow AB \cdot DC = AC \cdot EB \tag{1.2}$$

si sumamos estas igualdades

$$BC \cdot AD + AB \cdot DC = AC \cdot DE + AC \cdot EB = AC(DE + EB) \tag{1.3}$$

Pero $EB + DE \geq DB$ que es la diagonal del cuadrilátero por tanto

$$BC \cdot AD + AB \cdot DC \geq AC \cdot DB \tag{1.4}$$

■

Hemos demostrado que:

Teorema 1.2

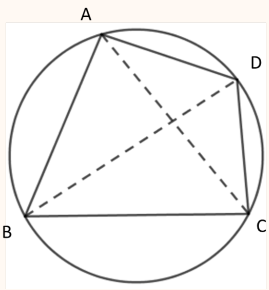
La suma de los productos de lados opuestos de un cuadrilátero es siempre mayor igual que el producto de sus diagonales

♡

Teorema 1.3 (de Ptolomeo)

Un cuadrilátero $\square\, ABCD$ es cíclico si el producto de sus diagonales es igual a la suma de los productos de los pares de lados opuestos.

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$



♡

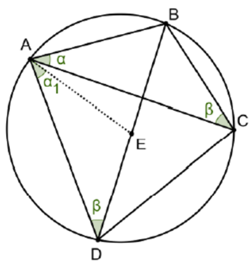
Demostración Supóngase que se tiene un cuadrilátero cíclico con vértices A, B, C y D. Sean AC y BD sus diagonales. Sean $\angle CAB = \alpha$ y $\angle BCA = \beta$. Se traza una recta tal que forme con AB un ángulo $\alpha_1 = \alpha$. Sea E el punto de intersección de esta recta con BD la diagonal del cuadrilátero.

Según (1,3)

$$BC{\cdot}AD{+}AB{\cdot}DC = AC{\cdot}DE{+}AC{\cdot}EB = AC(DE{+}EB)$$

pero como D, E y B son colineales, se tiene que (DE + EB) = DB y,

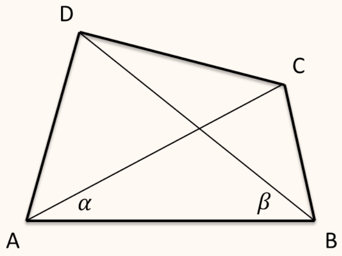
$$BC \cdot AD + AB \cdot DC = AC \cdot DB$$



■

Teorema 1.4 (Ptolomeo (regreso))

Supongamos que un cuadrilátero $\square ABCD$ *se cumple* $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$



entonces el cuadrilátero $\square ABCD$ *es cíclico* ♡

Demostración Junto al lado AD del cuadrilátero $\square ABCD$ colocamos un punto D' tal que

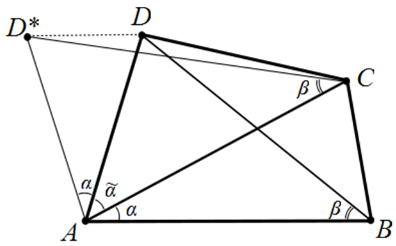
$$\angle CAD' = \angle BAD = \alpha + \alpha' \;\; y \;\; \angle ACD' = \angle ABD = \beta$$

Tenemos que los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle ACD'$ son semejantes por tanto

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AD'} = \frac{BD}{CD'}$$

de la primera y la última proporción obtenemos

$$CD' = \frac{BD \cdot AC}{AB} \tag{1.5}$$



también se tiene

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AD'} \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AD'}$$

y como $\angle BAC = \angle DAD'$ entonces los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ADD'$ son semejantes, por lo que

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AD'} = \frac{BC}{DD'} \Rightarrow DD' = \frac{BC \cdot AD}{AB}$$

de donde

$$CD + DD' = CD + \frac{BC \cdot AD}{AB} = \frac{AB \cdot CD + BC \cdot AD}{AB} = \frac{AC \cdot BD}{AB} = CD'$$

la igualdad de la expresión anterior sólo es posible si el punto D esta sobre CD'. Por lo tanto

$$\angle ACD = \angle ACD' = \angle ABD = \beta$$

lo que significa que el cuadrilátero $\square ABCD$ es cíclico. ■

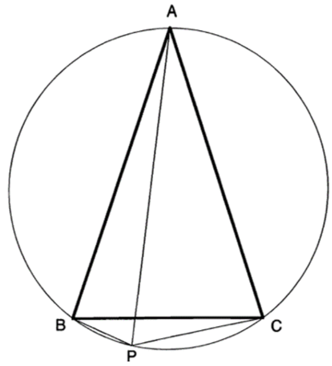
Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Muestre lo siguiente: Si el triángulo isósceles

$$\triangle ABC$$

(AC=AB) está inscrito en un circulo y un punto P esta en el arco BC, entonces se cumple la relación

$$\frac{PA}{PB + PC} = \frac{AC}{BC}$$



2. Muestre lo siguiente: Si el triángulo equilátero

$$\triangle ABC$$

está inscrito en un circulo y un punto P esta en el arco BC, entonces se cumple la relación

$$PA = PB + PC$$