GEOMETRÍA MODERNA

Notas del curso Geometría Moderna 1

Unidad 3

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

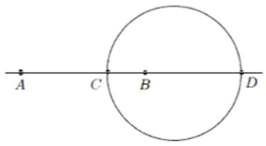
Capítulo 1 Unidad 3. Introducción a la geometría moderna

1.1 Conjugados armónicos

Si A y B son dos puntos en una línea, cualquier par de puntos C y D en la línea para el cual

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$$

se dice que divide AB armónicamente. Entonces se dice que los puntos C y D son **conjugados armónicos** con respecto a A y B.



Definición 1.1 (Conjugados armónicos)

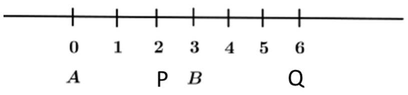
Si P es un punto, distinto de A y B, que divide un segmento dado AB en una razón r (independientemente que r sea positiva o negativa) y Q divide al mismo segmento en la razón –r, se dice que Q es el ***conjugado armónico*** *de P con respecto a AB.* ♣

Comentario Esta definición es equivalente decir que:

$$\frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB}$$

dado cualquier punto P, distinto de A y B, tiene conjugado armónico, con respecto a AB, con excepción del punto medio del segmento, ya que no hay un punto que divida al segmento en la razón -1.

Ejemplo 1.1 Si $AP = 2$, $AQ = 6$, $PB = 1$ y $QB = -3$

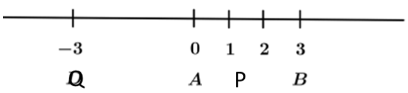


entonces

$$\frac{AP}{PB} = \frac{2}{1} = 2 \quad y \quad \frac{AQ}{QB} = \frac{6}{-3} = -2$$

Por tanto Q es el **conjugado armónico** de P con respecto a AB. ■

Ejemplo 1.2 Si $AP = 1$, $AQ = -3$, $PB = 2$ y $QB = 6$



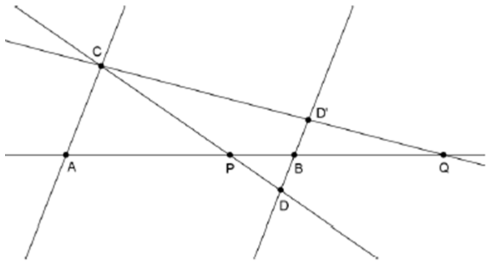
entonces

$$\frac{AP}{PB} = \frac{1}{2} \quad y \quad \frac{AQ}{QB} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Por tanto Q es el **conjugado armónico** de P con respecto a AB.

¿Y si P es el punto medio de AB? ¿Qué punto sería Q? **El punto al infinito**. ■

Ejemplo 1.3 Dado un segmento AB y un punto P, para construir el cuarto armónico, es decir el conjugado armónico de P respecto de AB, se puede proceder de la siguiente manera:



Se trazan dos rectas paralelas cualesquiera por A y B, se traza una recta por P que corte a estas paralelas en C y D respectivamente. En la recta DB se construye D' tal que $DB = BD'$. Se traza la recta CD'. El punto Q de intersección de esta recta con AB es el cuarto armónico buscado.

Demostración Para demostrar que efectivamente este es el punto buscado, basta comprobar que $\triangle\, ACP \approx \triangle\, BDP$ y que $\triangle\, CAQ \approx \triangle\, D'BQ$, por tener sus ángulos correspondientes iguales, de donde:

por la semejanza $\triangle\, ACP \approx \triangle\, BDP$

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BD}$$

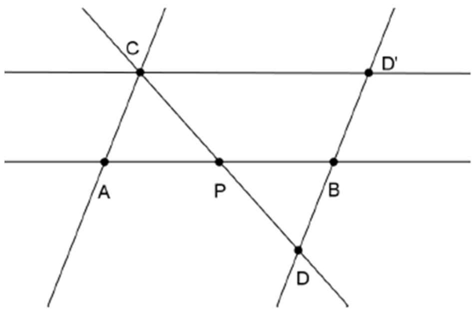
por la semejanza $\triangle\, CAQ \approx \triangle\, D'BQ$

$$\frac{AQ}{BQ} = \frac{AC}{BD}$$

por tanto

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AC}{DB} \quad y \quad \frac{AQ}{QB} = \frac{AC}{-BD'} \;\Rightarrow\; \frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB}$$

el único punto, distinto de A y B, que no tiene conjugado armónico con respecto a un segmento dado es el punto medio del segmento, ya que no existe un punto ordinario del plano euclidiano que divida al segmento en la razón r = -1. De la misma forma se vio que dado un segmento AB, la razón r en que los puntos exteriores al segmento dividen al segmento se acerca por los dos lados a r= -1, mientras más se alejan los puntos de A y B. Si además se retoma la construcción que se acaba de realizar, cuando P es el punto medio de AB, se tiene que los triángulos $\triangle\, ACP$ y $\triangle\, BDP$, no sólo son semejantes, sino congruentes y por tanto la recta CD' es paralela a la recta determinada por AB y por tanto su intersección es el punto al infinito de esas rectas.



■

Definición 1.2 (Conjugado armónico del punto medio de un segmento)

El conjugado armónico del punto medio de un segmento es el punto al infinito de esa recta. Esto es, si P es el punto al infinito de una recta que contiene al segmento AB, se define

$$\frac{AP}{PB} = -1$$

♣

Comentario Dado un segmento AB, cualquier punto P, distinto de A y B, tiene un único conjugado armónico Q respecto del segmento dado.

Teorema 1.1 (Unicidad del conjugado armónico)

Dados tres puntos colineales, el conjugado armónico de cualquiera de ellos es único

♡

Demostración

Sean B, L, C y L' cuatro puntos colineales tales que

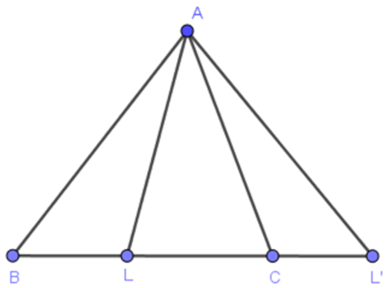
$$\frac{BL}{LC} = -\frac{BL'}{L'C}$$

y sea L'' tal que

$$\frac{BL}{LC} = -\frac{BL''}{L''C}$$

ello implica que $L' = L''$, pues no puede haber dos puntos que dividan a un segmento en la misma razón.

Es decir, el cuarto armónico es único



■

Teorema 1.2 (Propiedad 1 de Congugados armónicos)

Si Q es conjugado armónico de P respecto del segmento AB, entonces Q es conjugado armónico de P respecto del segmento BA.

♡

Demostración Tenemos que

$$\frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB} \Rightarrow \frac{PB}{AP} = -\frac{QB}{AQ} \Rightarrow \frac{-BP}{-PA} = -\frac{-BQ}{-QA} \Rightarrow \frac{BP}{PA} = -\frac{BQ}{QA}$$

que es equivalente a que Q sea el conjugado armónico del punto P respecto del segmento BA. ■

Teorema 1.3 (Propiedad 2 de Conjugados armónicos)

Si Q es conjugado armónico de P respecto del segmento AB, entonces P es conjugado armónico de Q respecto del segmento AB. Se dice entonces que P y Q son conjugados armónicos respecto de AB o bien que el segmento AB está dividido armónicamente por P y Q.

♡

Demostración Tenemos que

$$\frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB} \Rightarrow \frac{AQ}{QB} = -\frac{AP}{PB}$$

que es equivalente a que P sea el conjugado armónico del punto Q respecto del segmento A y B. ■

Teorema 1.4 (Propiedad 3 de Conjugados armónicos)

*Si P y Q son conjugados armónicos respecto del segmento AB, entonces A y B son conjugados respecto del segmento PQ. Se dice entonces que A, B; P y Q son una **hilera armónica**.*

♡

Demostración Sean P y Q conjugados armónicos respecto de A y B, entonces $\frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB}$. Pero

$$\frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB} \Rightarrow \frac{AP}{AQ} = -\frac{PB}{QB} \Rightarrow \frac{-PA}{AQ} = -\frac{PB}{-BQ} \Rightarrow -\frac{PA}{AQ} = \frac{PB}{BQ} \Rightarrow \frac{PA}{AQ} = -\frac{PB}{BQ}$$

lo que demuestra que A y B son conjugados armónicos con respecto a PQ. ■

Los tres teoremas anteriores demuestran que todas las permutaciones de A, B, P y Q que conservan las parejas de conjugados armónicos, es también armónica.

Comentario De esta forma, dado un segmento AB, cualquier punto P, distinto de A y B, tiene un único conjugado armónico Q respecto del segmento dado.

1.2 Razón cruzada

Cuando cuatro puntos A, B, P y Q en una línea, están en tal forma que cada uno de los pares A,B y P,Q son conjugados armónicos con respecto al otro par, se dice que A, B; P y Q constituyen una **hilera armónica** y se acostumbra representar como

$$(AB, PQ) = -1$$

Definición 1.3 (Razón cruzada)

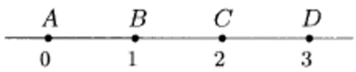
Dadas dos parejas de puntos A, B y P, Q, se define su razón cruzada como la razón

$$(AB, PQ) = \frac{\frac{AP}{PB}}{\frac{AQ}{QB}}$$

que se denota como (AB, PQ). ♣

Comentario Dada la definición de conjugados armónicos, es claro que su razón cruzada es -1.

Ejemplo 1.4 Encontrar (AB, CD), (AC, BD) y (BA, DC) donde A, B, C y D son puntos colineales con valores 0, 1, 2 y 3 respectivamente a lo largo de una recta



Solución *Trabajando directamente de la definición de razón cruzada, tenemos*

$$(AB, CD) = \frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}} = \frac{\frac{2}{(-1)}}{\frac{3}{(-2)}} = \frac{4}{3}$$

Similarmente

$$(AC, BD) = \frac{\frac{AB}{BC}}{\frac{AD}{DC}} = \frac{\frac{1}{(1)}}{\frac{3}{(-1)}} = -\frac{1}{3}$$

Finalmente

$$(BA, DC) = \frac{\frac{BD}{DA}}{\frac{BC}{CA}} = \frac{\frac{2}{(-3)}}{\frac{1}{(-2)}} = \frac{4}{3}$$

Teorema 1.5 (Propiedad de la razón cruzada)

Si $(AB, CD) = k$ *entonces*

- *Si intercambiamos cualquier par de puntos y también intercambiamos el otro par de puntos, entonces la relación cruzada resultante tiene el mismo valor k. Por tanto, (AB, CD), (BA, DC), (CD, AB) y (DC, BA) todos tienen el valor k.*
- *Intercambiar solo el primer par o solo el último par de puntos da como resultado una relación cruzada con el valor* $\frac{1}{k}$*. Por tanto,* $(BA, CD) = (AB, DC) = \frac{1}{k}$.
- *Intercambiar solo el par medio o solo el par exterior de puntos da como resultado una relación cruzada con el valor l - k. Por lo tanto, (AC, BD) = (DB, CA) = 1 - k*

♡

Demostración

- En este caso se tiene

$$(AB, CD) = \frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}} = \frac{AC \cdot DB}{CB \cdot AD} = k$$

$$(BA, DC) = \frac{\frac{BD}{DA}}{\frac{BC}{CA}} = \frac{(BD) \cdot (CA)}{(DA) \cdot (BC)} = \frac{(-DB) \cdot (-AC)}{(-AD) \cdot (-CB)} = \frac{AC \cdot DB}{CB \cdot AD} = k$$

$$(CD, AB) = \frac{\frac{CA}{AD}}{\frac{CB}{BD}} = \frac{(CA) \cdot (BD)}{(AD) \cdot (CB)} = \frac{(-AC) \cdot (-DB)}{(AD) \cdot (CB)} = \frac{AC \cdot DB}{CB \cdot AD} = k$$

$$(DC, BA) = \frac{\frac{DB}{BC}}{\frac{DA}{AC}} = \frac{(AC) \cdot (DB)}{(BC) \cdot (DA)} = \frac{(AC) \cdot (DB)}{(-AD) \cdot (-CB)} = \frac{AC \cdot DB}{CB \cdot AD} = k$$

- En este caso

$$(BA, CD) = \frac{\frac{BC}{CA}}{\frac{BD}{DA}} = \frac{BC \cdot DA}{CA \cdot BD} = \frac{(-CB) \cdot (-AD)}{(-AC) \cdot (-DB)} = \frac{CB \cdot AD}{AC \cdot DB} = \frac{1}{k}$$

$$(AB, DC) = \frac{\frac{AD}{DB}}{\frac{AC}{CB}} = \frac{AD \cdot CB}{DB \cdot AC} = \frac{1}{k}$$

- En este caso teniendo en cuenta que para tres punto colineales X,Y,Z se tiene que $XZ = XY + YZ$, con Y entre X y Z, se tiene intercambiando el par central

$$\begin{aligned}
(AC, BD) &= \frac{\frac{AB}{BC}}{\frac{AD}{DC}} = \frac{AB \cdot CD}{AD \cdot CB} \\
&= \frac{(AC + CB) \cdot (CB + BD)}{AD \cdot CB} \\
&= \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot CB} + \frac{AC \cdot CB + CB(CB + BD)}{AD \cdot CB} \\
&= -\frac{AC \cdot DB}{AD \cdot CB} + \frac{CB(AC + CB + BD)}{AD \cdot CB} \\
&= -k + 1
\end{aligned}$$

Intercambiando el par exterior, de (1) tenemos $(DB, CA) = (CA, DB)$ e intercambiando el par medio en el lado derecho, tenemos $(DB, CA) = 1 - (CD, AB)$ y nuevamente por (1), tenemos

$$(DB, CA) = 1 - (AB, CD) = 1 - k$$

■

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Suponga que A, B, C y D son cuatro puntos armónicos en una línea $\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$, pruebe que AC, AB

y AD están en progresión armónica, esto es

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$$

2. Suponga que A, B, C y D son cuatro puntos armónicos en una línea $\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$, pruebe que

$$OB^2 = OC \cdot OB$$