Facultad de Ciencias UNAM

# GEOMETRÍA MODERNA

## Notas del curso Geometría Moderna 1

### Unidad 3

**Autor:** Esteban Rubén Hurtado Cruz & Selma Fernanda Espinosa Guevara

**Instituto:** Facultad de Ciencias UNAM

**Fecha:** May. 2, 2021

**Versión:** 4.1

**Bio**: Semestre 2022-1

*La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.*

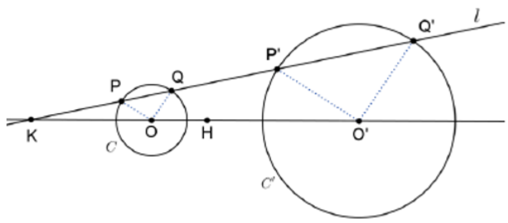
# Índice general

# Capítulo 1  Unidad 3. Introducción a la geometría moderna

## 1.1 Puntos homólogos y antihomólogos

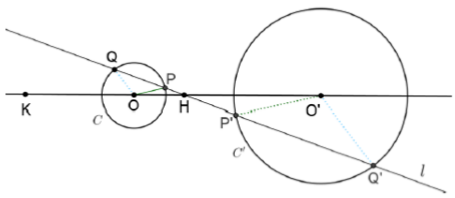
Si C y D son dos círculos, el centro de cualquier homotecia que transforme un círculo en otro se llama **centro de homotecia**.

Si una recta que pasa por un centro de homotecia de dos circunferencias corta a una de ellas en dos puntos, entonces corta a la otra también en dos puntos. Estos cuatro puntos son homotéticos por pares y a cada pareja de puntos homotéticos se les llama **homólogos**. A cada par de puntos que estén en la recta que pasa por un centro de homotecia, uno en cada circunferencia y que no sean homotéticos se les llama **antihomólogos**.

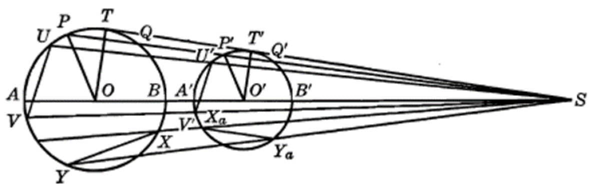



En la figura sea l una recta que pasa por K, centro de homotecia de C y C', y corta a la circunferencia C en dos puntos P y Q. Entonces corta también a C' en dos puntos, P' y Q', los homotéticos u **homólogos** de P y Q desde K, respectivamente. Los puntos P y Q', así como los puntos Q y P' que están en la misma recta y no son homotéticos se denominan **antihomólogos**.

En la figura la recta l pasa por el otro centro de homotecia H y los puntos homólogos son P y P' y Q y Q'. Los puntos antihomólogos son P y Q' y Q y P'.




Sean U, V dos puntos cualesquiera de una circunferencia de centro $0$ y U', V' sus puntos homólogos en $0'$, en relación con el mismo centro de homotecia. Se dice que las cuerdas UV, U'V 'son **cuerdas homólogas** de los dos círculos.




Dos **cuerdas homólogas** son paralelas, porque son líneas correspondientes en dos figuras homotéticas, a menos que se encuentren en una línea que pasa por el centro de homotecia, como, por ejemplo, las cuerdas PQ, P'Q'.

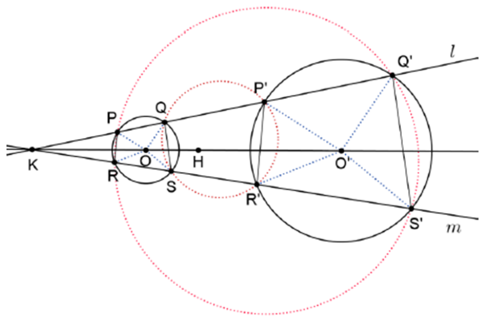
Dos puntos en dos círculos colineales con un centro de homotecia de los círculos y tales que los radios que pasan por estos puntos no son paralelos se dice que son **puntos antihomólogos** con respecto al centro de homotecia considerado. Por tanto, P y Q', P' y Q son pares de puntos antihomólogos en relación con el centro de homotecia.

**Teorema 1.1 (Propiedades de los puntos homólogos)**

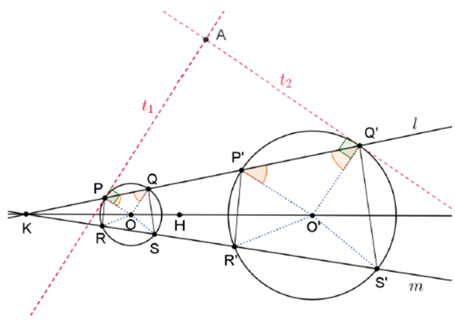
1. *PR es paralela a P'R' y QS es paralela a Q'S'*
2. *Los triángulos $\triangle KPR$ y $\triangle KP'R'$, así como los triángulos $\triangle KQS$ y $\triangle KQ'S'$ son directamente semejantes*
3. *Los cuadriláteros $\square PRS'Q'$ y $\square QSR'P'$ son cíclicos*
4. *El producto $KP \times KQ'$ es constante*
5. *Las tangentes a las circunferencias en P y Q' forman ángulos iguales con la recta PQ' y si se intersecan en el punto A el $\triangle PAQ'$ es isósceles*

♡

**Demostración**

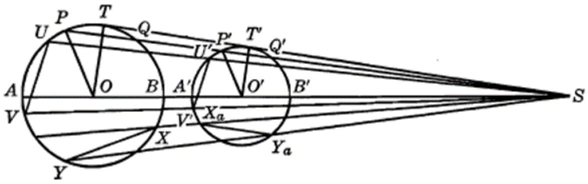



1. Ya que P' y R' son los homotéticos de P y R y Q' y S' los de Q y S, PR es paralela a P'R' y Q'S' es paralela a QS.
2. Por el resultado anterior se tiene que los tres ángulos de los triángulos $\triangle KPR$ y $\triangle KP'R'$, así como los triángulos $\triangle KQS$ y $\triangle KQ'S'$ son iguales respectivamente y por tanto los triángulos son semejantes.
3. Para demostrar que el cuadrilátero $\square PRS'Q'$ es inscriptible se demostrará que $\angle Q'PR + \angle RS'Q' = 180$. Se tiene que:
   $\angle QPR + \angle RSQ = 180$, por ser el cuadrilátero PRSQ inscriptible, $\angle RSQ = \angle RS'Q'$, ya que QS y Q'S' son rectas paralelas, por tanto, $\angle QPR + \angle RS'Q' = 180$, pero $\angle QPR = \angle Q'PR$ por ser Q', Q y P colineales, por tanto $\angle Q'PR + \angle RS'Q' = 180$, como se quería demostrar.
   De manera análoga se demuestra que el cuadrilátero QSP'R' es también inscriptible.
4. Ya que el cuadrilátero PRS'Q' es inscriptible, $KP \times KQ'$ es la potencia de K con respecto a la circunferencia por PRS'Q' y por tanto es constante.
5. Sean $t_1$ y $t_2$ las tangentes a las circunferencias en P y Q' respectivamente; por tanto, $OP \perp t_1$ y $OQ' \perp t_2$. Además, los triángulos OPQ y O'P'Q' son isósceles y semejantes, por tanto, $\angle OPQ = \angle OQP = \angle OP'Q' = \angle OQ'P'$. De donde se tiene que $\angle APQ' = \angle PQ'A$ y el $\triangle PAQ'$ es isósceles.




■

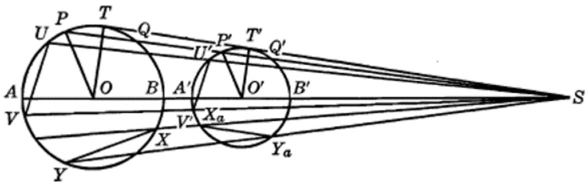
Si X, Y son dos puntos del círculo con centro 0, y $X_a$, $Y_a$ sus puntos antihomólogos en el círculo de centro O' en relación con el mismo centro de homotecia, se dice que las dos cuerdas XY, $X_aY_a$ son cuerdas antihomólogas de los dos círculos, con respecto al centro de homotecia considerado.




**Teorema 1.2 (Propiedad de puntos homólogos)**

*El producto de los dos segmentos determinado por dos pares de puntos homólogos en los que una secante corta estos círculos a través de un centro de homotecia de dos círculos, es constante.* ♡

**Demostración** De acuerdo a la figura



Nosotros tenemos

$$\frac{SP}{SA} = \frac{SP'}{SA'} = \frac{SP - SP'}{SA - SA'} = \frac{PP'}{AA'}$$

y, de manera similar:

$$\frac{SQ}{SB} = \frac{QQ'}{BB'}$$

por lo tanto, multiplicando:

$$\frac{SP \cdot SQ}{SA \cdot SB} = \frac{PP' \cdot QQ'}{AA' \cdot BB'}$$

Ahora bien, el lado izquierdo de esta igualdad es igual a la unidad; por eso:

$$PP' \cdot QQ' = AA' \cdot BB'$$

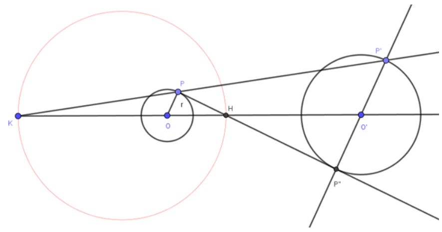
Dado que el lado derecho de no depende de la elección de la secante SPP', se demuestra la proposición. ■

**Comentario** Si los círculos tienen una tangente común que pasa por S y toca los círculos en T, T', podemos considerar la tangente STT' como una posición límite de la secante SP, para la cual los dos segmentos PP ', QQ' coinciden en TT ' ; por eso:

$$TT'^2 = PP' \cdot QQ'$$

## 1.2 Circunferencia de similitud de dos circunferencias

La circunferencia de similitud de dos circunferencias no concéntricas y de radios diferentes, es la circunferencia que tiene como diámetro el segmento que une sus centros de homotecia H,K, también llamados centros de similitud.



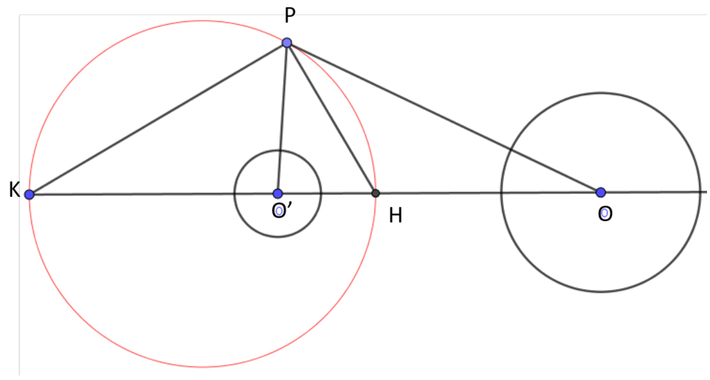
**Teorema 1.3 (Propiedades del círculo de similitud)**

*La circunferencia de similitud de dos circunferencias no concéntricas es el lugar geométrico de los puntos*

1. *tales que las razones de sus distancias a los centros de las circunferencias son iguales a las razones entre los radios*
2. *desde las cuales las dos circunferencias subtienden ángulos iguales.*

♡

**Demostración** consideramos dos circunferencias desiguales y sea P un punto tal que $\frac{PO}{PO'} = \frac{r}{r'}$




donde r y r' son los radios de las circunferencias O y O', de los cuales H y K son los centros de similitud. Entonces ya que $\frac{OH}{HO'} = \frac{r}{r'}$, PH es bisectriz del ángulo interior en P del triángulo $\triangle\, OPO'$. Asimismo, PK es la bisectriz del ángulo exterior en P del mismo triángulo. Entonces PH y PK son perpendiculares, y P está en la circunferencia de similitud.

Inversamente, supongamos que P está en la circunferencia de similitud. En la línea tomemos $O''$ tal que PH biseque al ángulo $\angle\, O'PO''$. Entonces, puesto que PH y PK son perpendiculares y que bisecan los ángulos interior y exterior en P del triángulo $\triangle\, O''PO'$ tenemos

$$\frac{O''H}{HO'} = -\frac{O''K}{KO'}$$

pero también

$$\frac{OH}{HO'} = -\frac{OK}{KO'}$$

de donde

$$\frac{HO''}{O''K} = \frac{HO}{OK}$$

y $O''$ coincide con O. Se sigue que

$$\frac{PO}{PO'} = \frac{r}{r'}$$

■

## Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Pruebe lo siguiente: El producto de las distancias de un centro de homotecia de dos círculos desde dos puntos antihomólogos con respecto al centro de homotecia considerado, es constante.
2. Pruebe lo siguiente: Los seis centros de similitud de tres círculos tomados en pares se encuentran de a cuatro centros de similitud situados en tres en líneas rectas.