Facultad de Ciencias UNAM

GEOMETRÍA MODERNA

Notas del curso Geometría Moderna 1

Unidad 3

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 3. Introducción a la geometría moderna

1.1 Puntos ideales

Muchas propiedades de la geometría euclidiana tienen más bien casos especiales desafortunados. Por ejemplo, dos puntos distintos siempre determinan exactamente una línea (pasando por las dos puntos), pero dos líneas coplanares distintas (líneas que se encuentran en el mismo plano) determinan exactamente un punto (de intersección) sólo cuando no son paralelos. Esta deficiencia puede remediarse imaginando un punto en el infinito en el que las dos rectas paralelas encontrarse. Las razones de división de un segmento sirven para atar juntas tanto las ideas de elementos infinitos como medidas dirigidas.

Definición 1.1

Para cada línea euclidiana, agregamos un punto ideal (o punto en el infinito) que tiene las siguientes propiedades.

- *Las líneas paralelas comparten el mismo punto ideal.*
- *Las líneas cruzan tienen un punto ideal distinto.*
- *Todos los puntos ideales que pertenecen a las líneas en un plano euclidiano dado, forman la línea ideal de ese plano.*
- *Los planos paralelos comparten la misma línea ideal.*
- *Los planos ordinarios que se cruzan tienen líneas ideales distintas.*
- *Todos los puntos ideales (y líneas ideales) en el espacio forman el plano ideal.*
- *Cada punto ideal se considera infinitamente alejado de cualquier otro punto (ordinario o ideal).*

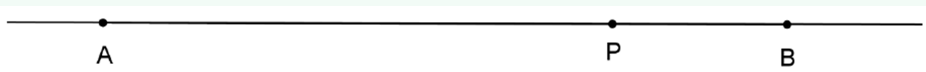
El plano euclidiano así aumentado se llama ***plano extendido****. Y el espacio euclidiano así aumentado se llama* ***espacio extendido****. Los puntos, así como las líneas y los planos, que no son* ***ideales*** *son llamados* ***ordinarios****.* ♣

1.2 Razón de división de un segmento

Definición 1.2 (Razón de división)

Dado un segmento dirigido AB y un punto P, distinto de A y B, en la recta que determinan A y B, se define la razón en que el punto P, distinto de los puntos A y B, divide a un segmento AB como:

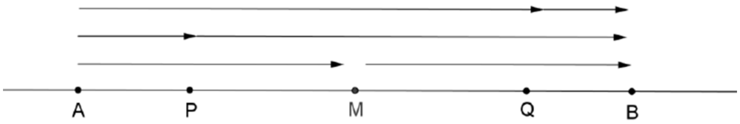
- $r = \frac{AP}{PB}$ *para un punto P tal que* $P \neq B$
- $r = \infty$ *si* $P = B$
- $r = -1$ *si P es el punto ideal en la línea AB*



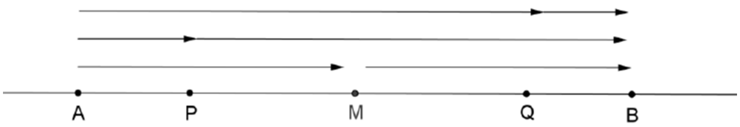
♣

Comentario Si P está entre A y B, entonces se dice que P divide AB internamente; si $P = A$ o $P = B$, entonces P divide AB impropiamente; de lo contrario, P divide a AB externamente. En todos los casos escribimos $r = \dfrac{AP}{PB}$.

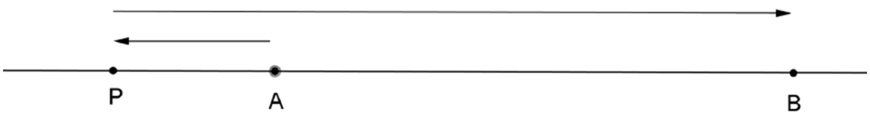
De lo anterior se deduce que la relación r en la que P divide el segmento AB puede ser cualquier número real, por ejemplo si M es el punto medio del segmento AB, entonces AM = MB y $\dfrac{AM}{MB} = 1$.



Si P está en el segmento AM, entonces $AP < PB$ y se tiene que $\dfrac{AP}{PB} < 1$ aunque nunca es 0, si $P \neq A$. Se puede observar que mientras menor es AP, PB es mayor y por tanto r es menor. Dicho de otra manera, mientras más se acerca P a A, r se acerca más a 0 y si P se acerca a M, entonces r se acerca a 1.



Ahora, si Q está en el segmento MB, entonces $AQ > QB$ y $\dfrac{AQ}{QB} > 1$. Se puede observar que mientras mayor es AQ, QB es menor y por tanto r es mayor. Dicho de otra manera, mientras más se acerca Q a B, r crece y si Q se acerca a M, entonces r se acerca a 1. Una pregunta que se puede hacer es si para este caso r puede tomar cualquier valor positivo mayor que 1.
Si P está en el exterior de un segmento AB se dice que P lo divide externamente y la razón es negativa.



Se considera primero el caso en que P y B están en diferentes semirrectas determinadas por A, como en la figura. AP y PB tienen diferentes sentidos. Además, PB = PA + AB, por lo tanto:

1. $r = \dfrac{AP}{PB}$ es negativa, ya que AP y PB tienen diferentes sentidos.
2. $r = \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AP}{PA + AB}$ y $|AP| < |PA + AB|$ y por tanto $\left|\dfrac{AP}{PA + AB}\right| < 1$. Esto indica que en este caso $-1 < r < 0$.

Ahora, si P es externo al segmento AB y P y B están en la misma semirrecta determinada por A, como en la figura

AP y PB tienen diferentes sentidos. Además, $AP = AB + BP$, por lo tanto:

1. $r = \dfrac{AP}{PB}$ es negativa, ya que AP y PB tienen diferentes sentidos.
2. $r = \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AB + BP}{PB}$ es tal que $|AB + BP| > |PB|$ y por tanto $\left|\dfrac{AB + BP}{PB}\right| > 1$. Esto indica que en este caso $r < -1$.

Teorema 1.1 (Unicidad)

Sean P y Q son dos puntos en la recta determinada por los puntos A y B. Si P y Q dividen al segmento AB en la misma razón $r \neq -1$, entonces coinciden ♡

Demostración Sean P y Q tales que $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{QB} = r$, por tanto se tiene

$$\frac{AB}{PB} = \frac{AP + PB}{PB} = \frac{AP}{PB} + 1 = \frac{AQ}{QB} + 1 = \frac{AQ + QB}{QB} = \frac{AB}{QB}$$

Dado que la primera y la última fracciones tienen un valor distinto de cero en sus numeradores, sus denominadores también son iguales. Entonces $PB = QB$, entonces $P = Q$. ■

Teorema 1.2 (Existencia)

Dado un segmento AB y r $\neq 1$, entonces existe un punto P que divide al segmento en la razón r. ♡

Demostración Sea r un real, $r \neq 1$ y sea AB un segmento. Si P divide al segmento AB en la razón r se tiene,

$$\frac{AP}{PB} = r \;\Rightarrow\; AP = r\,PB \tag{1.1}$$

además,

$$AP + PB = AB \;\Rightarrow\; AP = AB - PB \tag{1.2}$$

Sustituyendo el valor de AP de (1,2) en (1,1)

$$AB - PB = r\,PB \;\Rightarrow\; AB = PB(r+1) \;\Rightarrow\; PB = \frac{AB}{r+1}$$

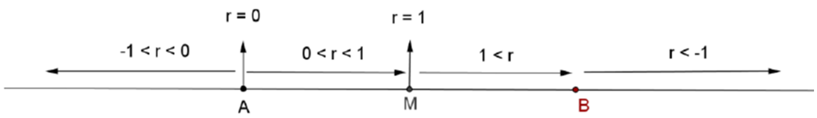
Esta ecuación nos da el valor de PB y tiene solución siempre y cuando $1 + r \neq 0$, lo cual sucede si y sólo si $r \neq -1$, tal y como se afirma en la hipótesis del teorema. ■

De acuerdo con los resultados anteriores para cada segmento AB y cada $r \neq -1$, existe un único punto P, tal que $\frac{AP}{PB} = r$. Si $r > 0$, el punto P está el interior del segmento AB y si $r < 0$, y $r \neq -1$, el punto P está el exterior del segmento AB. ¿Qué punto divide al segmento AB en la razón r = 0?

Sea P el punto que divide al segmento AB en la razón $r = 0 \Rightarrow r = \frac{AP}{PB} = 0$ y por tanto $AP = 0 \Rightarrow P = A$.

Análogamente si $P = A$, $AP = 0 \Rightarrow r = 0$. Esto es, P divide al segmento AB en la razón $r = 0 \Leftrightarrow P = A$.

En el caso que P = B, se tiene que PB = 0 y la razón es indeterminada.



De acuerdo con los resultados anteriores se tiene que, dado un segmento AB, a cualquier punto P en la recta que determinan, con excepción de B, se asocia la razón r en que ese punto divide al segmento AB. Asimismo, para cada número real $r \neq -1$, existe un único punto en la recta AB que divide al segmento AB en esa razón.

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Decide si cada afirmación es verdadera o falsa en el espacio extendido.
2. Cada línea tiene exactamente un punto ideal.
3. Cada dos planos distintos se encuentran en una sola línea.
4. Hay infinitos planos ideales.