Facultad de Ciencias UNAM

GEOMETRÍA MODERNA

Notas del curso Geometría Moderna 1

Unidad 3

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

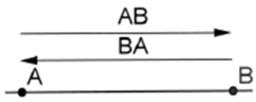
Índice general

Capítulo 1 Unidad 3. Introducción a la geometría moderna

1.1 Segmentos dirigidos

Una de las diferencias más importantes entre la geometría clásica y la geometría moderna es la introducción del concepto de signo y no solo el de magnitud. Dados dos segmentos AB y CD en la misma recta podemos decidir si tienen la misma dirección o la dirección contraria.

Segmentos dirigidos En general, tenemos que el segmento AB es igual al segmento BA. Cuando al segmento AB le asignamos un sentido, por ejemplo de A a B, tenemos el segmento dirigido AB, mientras que si lo vemos de B a A tenemos el segmento dirigido BA. Las magnitudes de los segmentos dirigidos AB y BA son las mismas, pero sus direcciones son opuestas. Entonces el segmento BA tendrá sentido opuesto a AB, y esto lo señalamos expresando $AB = -BA$.



O, equivalentemente, pero escrito de manera más simétrica:

$$AB + BA = 0 \tag{1.1}$$

El concepto de segmentos dirigidos tienen como propiedades más importantes las siguientes.

Teorema 1.1 (Fórmula de Chasles)

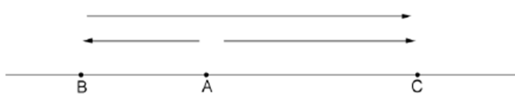
Si A, B y C son tres puntos alineados, entonces

$$AB + BC + CA = 0$$

para cualquier orden de los puntos A, B y C.

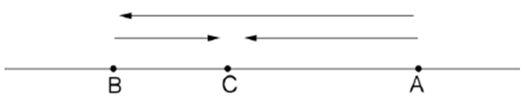
Demostración [Fórmula de Chasles]

1. Si B y C están en semirrectas diferentes determinadas por el punto A, esto es A está en medio de B y C se tiene que AB y AC tienen sentidos opuestos y que AC y BC tienen el mismo sentido



por lo tanto, $AB + BC = -BA + BC = AC$. Independientemente de la semirrecta en que están B y C, la demostración es la misma, siempre y cuando A esté en medio.

2. Si B y C están en la misma semirrecta determinada por el punto A, y C está en medio de AB se tiene que AB y AC tienen el mismo sentido y que AC y BC tienen sentido opuesto.



por lo tanto, $AB + BC = AB - CB = AC$. La demostración es análoga para el caso en que B está en medio de A y C.

Observe que en el caso de que no se estén considerando los segmentos dirigidos la fórmula $AB + BC =$

AC sólo es válida cuando B está en medio de A y C. Pero si se consideran los segmentos dirigidos, en todos los casos $AB + BC = AC$ y por tanto, $AB + BC + CA = AC + CA = 0$.

Si B es un punto interior del segmento AC, tenemos que

$$AB + BC = AC$$

y según (1,2)

$$AB + BC + CA = AC + CA = 0$$

■

Teorema 1.2 (Fórmula de Euler)

Si A, B, C y D son cuatro puntos alineados, entonces

$$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0$$

♡

Demostración [Fórmula de Euler] Ya que $AB + BC = AC$, para cualesquiera tres puntos colineales A, B y C,

$$AB = AD + DB, \quad AC = AD + DC, \quad BC = BD + DC$$

De estas tres igualdades se obtiene

$$AB = DB - DA, \quad AC = DC - DA \ \ y \ \ BC = DC - DB,$$

por lo que se tiene:

$$\begin{aligned} AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC &= (DB - DA)CD + (DC - DA)DB + (DC - DB)AD \\ &= DB \cdot CD - DA \cdot CD + DC \cdot DB - DA \cdot DB + DC \cdot AD - DB \cdot AD, \end{aligned}$$

y reagrupando,

$$DB(CD + DC) - DA(CD + DC) - DB(DA + AD) = DB(0) - DA(0) - DB(0) = 0$$

■

Teorema 1.3 (Fórmula de Stewart)

Si A, B, C y D son cuatro puntos alineados, entonces

$$DA^2 \cdot BC + DB^2 \cdot CA + DC^2 \cdot AB + AB \cdot BC \cdot CA = 0$$

♡

Demostración [Fórmula de Stewart] Usando las identidades siguientes

$$AB + BC = AC \ \Rightarrow \ AB = CB - CA$$

$$DC + CA = DA \ \Rightarrow \ CA = DA - DC \ \Rightarrow \ -CA = DC - DA$$

$$DC + CB = DB \ \Rightarrow \ CB = DB - DC \ \Rightarrow \ BC = DC - DB$$

obtenemos:

1. Para el término $DA^2 \cdot BC$

$$\begin{aligned} DA^2 \cdot BC &= DA^2 \cdot (DC - DB) \\ &= DA^2 \cdot DC - DA^2 \cdot DB \end{aligned}$$

2. Para el término $DB^2 \cdot CA$

$$\begin{aligned} DB^2 \cdot CA &= DB^2 \cdot (DA - DC) \\ &= DB^2 \cdot DA - DB^2 \cdot DC \end{aligned}$$

3. Para el término $DC^2 \cdot AB$

$$\begin{aligned} DC^2 \cdot AB &= DC^2 \cdot (DB - DA) \\ &= DC^2 \cdot DB - DC^2 \cdot DA \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} AB \cdot BC \cdot CA &= (DB - DA) \cdot (DC - DB) \cdot (DA - DC) \\ &= (DB \cdot DC + DB^2 - DA \cdot DC + DA \cdot DB)(DA - DC) \end{aligned}$$

esto es

$$AB \cdot BC \cdot CA = DB \cdot DC \cdot DA - DB \cdot DC^2 - DB^2 \cdot DA + DB^2 \cdot DC - DA^2 \cdot DC +$$
$$DA \cdot DC^2 + DA^2 \cdot DB - DA \cdot DB \cdot DC$$
$$= -DB \cdot DC^2 - DB^2 \cdot DA + DB^2 \cdot DC - DA^2 \cdot DC + DA \cdot DC^2 + DA^2 \cdot DB$$

La primera parte nos da

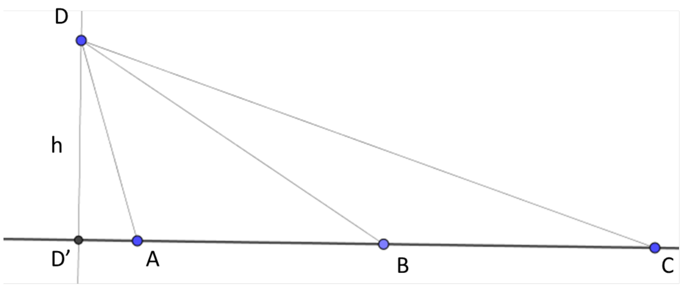
$$DA^2 \cdot BC + DB^2 \cdot CA + DC^2 \cdot AB = DA^2 \cdot DC - DA^2 \cdot DB + DB^2 \cdot DA - DB^2 \cdot DC + DC^2 \cdot DB - DC^2 \cdot DA \tag{1.2}$$

La segunda parte nos da

$$AB \cdot BC \cdot CA = -DB \cdot DC^2 - DB^2 \cdot DA + DB^2 \cdot DC - DA^2 \cdot DC + DA \cdot DC^2 + DA^2 \cdot DB \tag{1.3}$$

Al sumar $(1{,}2)$ y $(1{,}3)$ obtenemos el resultado.

En el caso en que el punto D no este alineado con A,B y C, se cumple el resultado de Stewart, para demostrarlo se considera la proyección D' en la recta que contiene a los puntos A, B y C



Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} DA^2 = h^2 + D'A^2 &\Rightarrow DA^2 \cdot BC = h^2 \cdot BC + D'A^2 \cdot BC \\ DB^2 = h^2 + D'B^2 &\Rightarrow DB^2 \cdot CA = h^2 \cdot CA + D'B^2 \cdot CA \\ DC^2 = h^2 + D'C^2 &\Rightarrow DC^2 \cdot BC = h^2 \cdot BC + D'C^2 \cdot AB \end{aligned}$$

Sumando tenemos

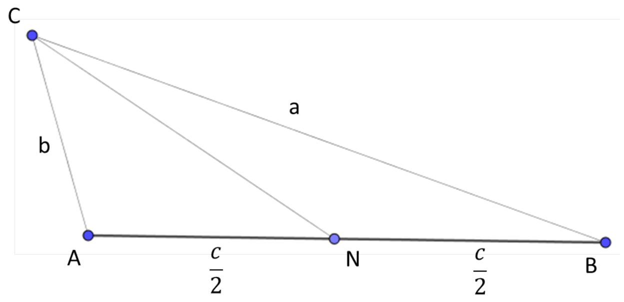
$$\begin{aligned} DA^2 \cdot BC + DB^2 \cdot CA + DC^2 \cdot BC &= h^2 \cdot BC + D'A^2 \cdot BC + h^2 \cdot CA + D'B^2 \cdot CA + h^2 \cdot BC + D'C^2 \cdot AB \\ &= h^2(BC + CA + BC) + D'A^2 \cdot BC + D'B^2 \cdot CA + D'C^2 \cdot AB \\ &= -AB \cdot BC \cdot CA \end{aligned}$$

■

Ejemplo 1.1 Dado el triángulo $\triangle\ ABC$, si N el punto medio de AB, entonces

$$CN^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

Solución *En el triángulo $\triangle\, ABC$ sea N el punto medio de AB.*



Entonces para los puntos A,N,B,C la fórmula de Stewart nos da

$$CA^2 \cdot NB + CN^2 \cdot BA + CB^2 \cdot AN + AN \cdot NB \cdot BA = 0$$
$$b^2 \cdot \frac{c}{2} - CN^2 \cdot c + a^2 \cdot \frac{c}{2} - \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot c = 0$$

y de ahí

$$CN^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Pruebe que $AB + BC + CD = AD$
2. Demuestre que si O, A, B son colineales, tenemos, tanto en magnitud como en signo
$$OA^2 + OB^2 = AB^2 + 2OA \cdot OB$$
3. Use la fórmula de Stewart para encontrar la longitud de las medianas de un triángulo