GEOMETRÍA MODERNA

Notas del curso Geometría Moderna 1

Unidad 1

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

1. Unidad 1. Geometría del triángulo **1**

1.1. Semejanza de triángulos 1

1.2. Criterios de semejanza de triángulos 3

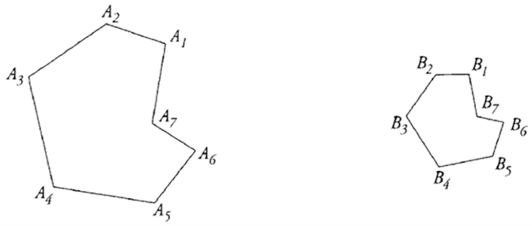
Capítulo 1 Problemas para pensar 5

Capítulo 1 Unidad 1. Geometría del triángulo

1.1 Semejanza de triángulos

Semejanza

La palabra semejanza se usa en geometría para describir dos figuras que tienen formas idénticas pero no necesariamente del mismo tamaño.
Dos polígonos son semejantes si los ángulos correspondientes son congruentes y las proporciones de los lados correspondientes son iguales



Definición 1.1 (Triángulos semejantes)

Dados dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$, diremos que son semejantes si

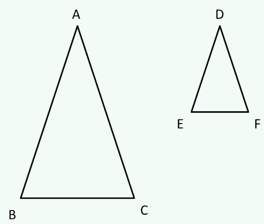
a) Si sus ángulos respectivos son iguales, es decir:

$$\angle ABC = \angle DEF$$
$$\angle BAC = \angle EDF$$
$$\angle ACB = \angle DFE$$

b) Si sus lados respectivos son proporcionales, es decir

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = k$$

donde k es un número real positivo.



♣

La constante k se llama constante de proporcionalidad o factor de aumento. Si $k > 1$, el triángulo $\triangle ABC$ es más grande que el triángulo $\triangle DEF$; si $0 < k < 1$, el triángulo $\triangle ABC$ es más pequeño que el triángulo $\triangle DEF$; y si $k = 1$, los triangulos son congruentes. Se suele usar el símbolo $\sim$ para denotar semejanza.

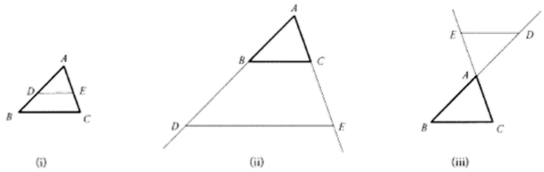
Lema 1.1

En un triángulo $\triangle ABC$, supongamos que D y E son puntos que estan en los lados AB y AC respectivamente, y DE es paralelo a BC. Entonces

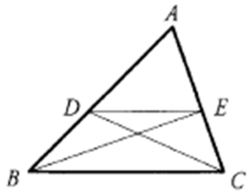
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

♡

En el resultado anterior se deben considerar tres posibilidades



Demostración En el caso (i), la línea DE entra en el triángulo ABC por el lado AB y por tanto debe salir por el vértice C o por uno de los otros dos lados. Dado que DE es paralela a BC, la línea DE no puede pasar por el vértice C o cualquier otro punto del lado BC. De ello se deduce que DE debe salir del triángulo por el lado AC



Al trazar los segmentos BE y CD y usando los hechos citados anteriormente sobre áreas de triángulos se obtiene

$$\frac{A(ADE)}{A(BDE)} = \frac{AD}{DB} \quad y \quad \frac{A(ADE)}{A(CDE)} = \frac{AE}{CE}$$

como $A(BDE) = A(CDE)$ se tiene que

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \blacksquare$$

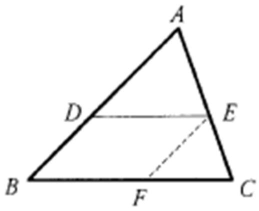
Teorema 1.1

Dado un triángulo $\triangle ABC$ supongamos que DE es paralelo a BC. Si D y E son puntos que estan sobre los lados AB y AC respectivamente, entonces

$$\triangle ABC \sim \triangle ADE$$

♡

Demostración Según los datos del problema se tiene la figura



según los resultados previos

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

lo que implica que

$$\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$$

y tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE} &\Rightarrow \frac{DB}{AD} + 1 = \frac{EC}{AE} + 1 \\ &\Rightarrow \frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE} \\ &\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}\end{aligned}$$

Ahora, a través de E, dibujamos EF paralelo a AB, con F sobre BC. Usando un argumento similar al anterior, obtenemos

$$\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{BF}$$

Dado que $DE = BF$ (porque BDEF es un paralelogramo), obtenemos

$$\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

Así

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

por lo tanto los triángulos $\triangle\, ABC$ y $\triangle\, ADE$ son semejantes ■

1.2 Criterios de semejanza de triángulos

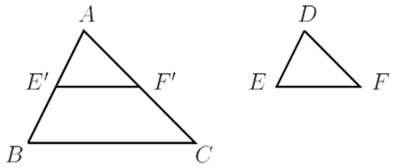
Teorema 1.2 (Criterio de semejanza de triángulo (AAA))

Si dos triángulos tienen sus ángulos correspondientes iguales entonces sus lados correspondientes son proporcionales y los triángulos son semejantes. ♡

Demostración Sean ABC y DEF dos triángulos con ángulos correspondientes iguales, tenemos que demostrar que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

Se probará la primera igualdad.



Sean E' y F' dos puntos en AB y AC respectivamente, tales que $AE' = DE$ y $AF' = DF$. Por el criterio de congruencia LAL, tenemos que los triángulos $\triangle\, AE'F'$ y $\triangle\, DEF$ son congruentes. Por lo tanto $\angle\, AE'F' = \angle\, DEF$.

Como $\angle\, DEF = \angle\, ABC$ entonces $\angle\, AE'F' = \angle\, ABC$. Luego $E'F'$ y BC son paralelas, tenemos entonces que

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$$

Como $AE' = DE$ y $AF' = DF$, resulta que

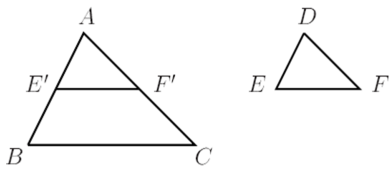
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \quad ■$$

Teorema 1.3 (Criterio de semejanza de triángulos (LAL))

Si dos triángulos tienen sus lados correspondientes son proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos es igual, entonces los triángulos son semejantes. ♡

Demostración Consideremos los triángulos ABC y DEF tales que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \quad y \quad \angle BAC = \angle EDF$$



Sean E' y F' dos puntos en AB y AC respectivamente, tales que $AE' = DE$ y $AF' = DF$. Por el criterio de congruencia LAL, tenemos que los triángulos $\triangle AE'F'$ y $\triangle DEF$ son congruentes.

Por lo tanto

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$$

Tenemos que E'F' es paralelo a BC por lo tanto

$$\angle ABC = \angle AE'F'$$

por hipótesis $\angle BAC = \angle EDF$ por lo tanto

$$\angle AF'E' = \angle ACB$$

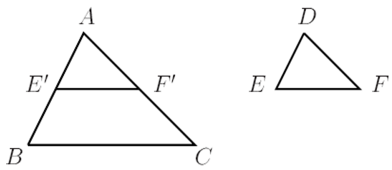
por lo que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle AE'F'$ son semejantes por el criterio de semejanza (AAA) y como los triángulos $\triangle AE'F'$ y $\triangle DEF$ son congruentes entonces los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son semejantes. ■

Teorema 1.4 (Teorema Criterio de semejanza de triángulos (LLL))

Si dos triángulos tienen sus lados correspondientes proporcionales entonces los triángulos son semejantes. ♡

Demostración Sean ABC y DEF dos triángulos que cumplen:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$



Sean E' y F' dos puntos en AB y AC respectivamente, tales que $AE' = DE$ y $AF' = DF$. Sustituyendo tenemos

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \Rightarrow \frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$$

Como los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle AE'F'$ comparten el ángulo A, por el criterio de semejanza LAL, los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle AE'F'$ son semejantes.

Por definición de semejanza

$$\frac{E'F'}{BC} = \frac{AE'}{AB}$$

de donde

$$E'F' = BC\,\frac{AE'}{AB}$$

como $AE' = DE$ entonces

$$E'F' = BC\,\frac{DE}{AB}$$

Por otro lado

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \;\Rightarrow\; EF = BC\,\frac{DE}{AB}$$

por lo que $E'F' = EF$. Por el criterio de congruencia LLL, los triángulos $\triangle\, AE'F'$ y $\triangle\, DEF$ son congruentes, y los triángulos $\triangle\, ABC$ y $\triangle\, DEF$ son semejantes. ■

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Pruebe lo siguiente: Si tenemos dos triángulos $\triangle\, ABC$ y $\triangle\, DEF$ con
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}, \quad AB > AC, \quad DE > DF, \quad y \quad \angle\, BCA = \angle\, EFD$$
entonces los triángulos son semejantes