Facultad de Ciencias UNAM

GEOMETRÍA MODERNA

Notas del curso Geometría Moderna 1

Unidad 2

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

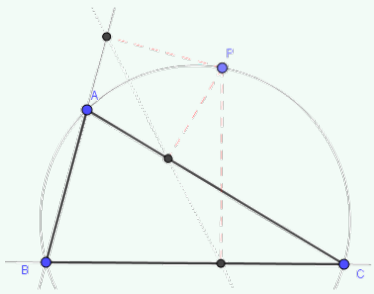
Índice general

Capítulo 1 Unidad 2. Circunferencia y cuadriláteros cíclicos

1.1 Línea de Simson

Definición 1.1 (Línea de Simson)

La línea que pasa por los pies de las perpendiculares a los lados de un triángulo desde un punto de su circunferencia circunscrita se llama línea del pedal, o línea de Simson, del punto con respecto al triángulo.

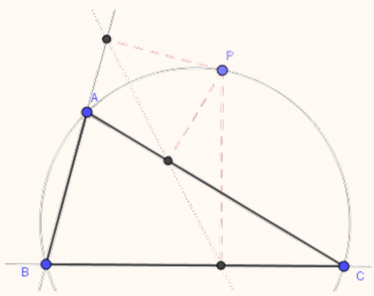


♣

En el siglo XIX se supuso que este teorema se debió a Robert Simson (1687-1768), y su nombre se adjuntó a la línea. Sin embargo,el investigador J. S. Mackay * ha demostrado que el teorema no se encuentra en ninguno de los escritos de Simson, ni hay ninguna prueba de que lo conociera. Mackay encuentra que el error se originó en una declaración descuidada del geómetra francés Servois, quien se refirió a *el siguiente teorema, que creo que es de Simpson*. Posteriormente, en su tratado de geometría proyectiva, Poncelet reprodujo la adscripción sin la frase calificativa, perpetuando así el error. El teorema fue descubierto por primera vez en 1797 por un tal William Wallace; su historia se da detalladamente en el papel de Mackay. Siguiendo el ejemplo de Mackay, algunos geómetras han descartado el término familiar línea de Simson y han designado la línea como la línea de Wallace; Indudablemente, la "línea de pedal"sería preferible en muchos sentidos, pero nos adheriremos al término tradicional.

Teorema 1.1 (Línea de Simson)

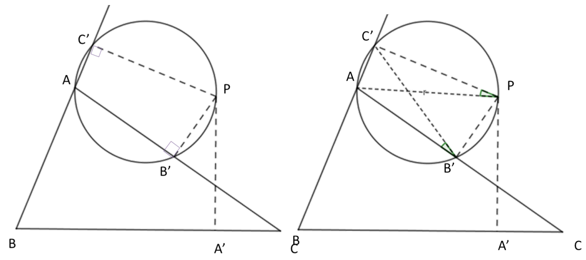
Las proyecciones de un punto P sobre los lados de un triángulo $\triangle ABC$ son colineales si y sólo si el punto se encuentra sobre el circuncírculo del triángulo



♡

Demostración Sean ABC el triángulo, P el punto y A', B' y C' las proyecciones de P sobre los lados BC, CA y AB respectivamente. Tenemos que

1. El cuadrilátero $\square AB'C'P$ es cíclico pues sus ángulos opuestos al ser proyecciones cumplen que $\angle AC'P = 90$, $\angle AB'P = 90$ y por tanto son suplementarios

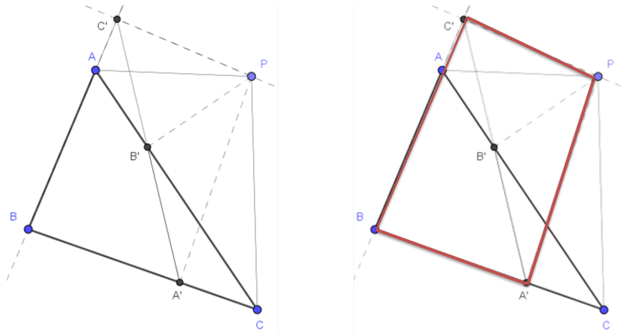


en consecuencia se tiene que los ángulos que forman las diagonales de éste cuadrilátero $\square AB'C'P$ cumplen

$$\angle C'B'A = \angle C'PA$$

ya que subtienden el mismo arco.

2. El cuadrilátero $\square BA'PC'$ es cíclico pues

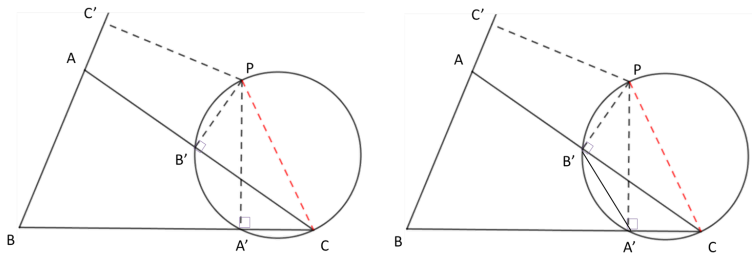


$$\angle BC'P + \angle PA'B = 180 \tag{1.1}$$

también

$$\begin{aligned} \angle C'PA &= 180 - \angle C'BA' \\ &= 180 - \angle ABC \end{aligned}$$

3. El cuadrilátero $\square A'CPB'$ es cíclico pues tomando PC como diámetro



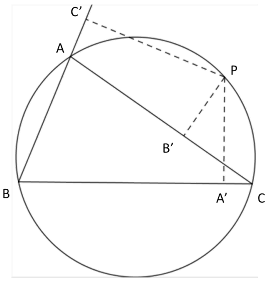
se tiene que

$$\angle PB'C + \angle PA'C = 90 + 90 = 180$$

por lo tanto

$$\angle A'PC = \angle A'B'C$$

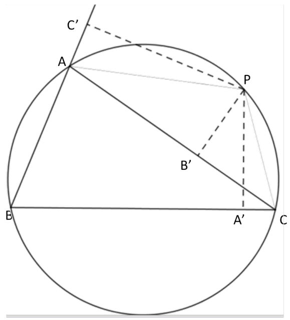
4. El cuadrilátero $\square APBC$ es cíclico por hipótesis



por tanto se tiene

$$\angle APC + \angle ABC = 180 \tag{1.2}$$

5. El cuadrilátero $\square BA'PC'$ es cíclico pues $\angle BC'P + \angle C'PA' = 180$



por tanto

$$\angle C'PA' = 180 - \angle ABC \tag{1.3}$$

de $(1{,}2)$ y $(1{,}3)$ se tiene

$$\angle APC + \angle ABC = \angle C'PA' + \angle ABC$$

por lo tanto

$$\angle APC = \angle C'PA' \tag{1.4}$$

Por otro lado

$$\angle APC = \angle APA' + \angle A'PC$$

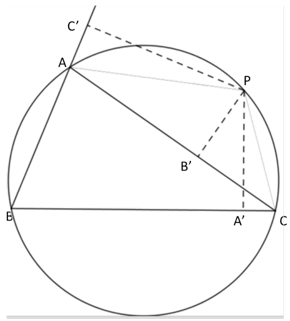
$$\angle C'PA' = \angle C'PA + \angle APA'$$

por lo que en $(1{,}4)$ se tiene

$$\angle APA' + \angle A'PC = \angle C'PA + \angle APA'$$

en consecuencia

$$\angle A'PC = \angle C'PA \tag{1.5}$$



Para concluir que A', B' y C' estan alineados, bastará observar que $B'C'$ y $B'A'$ forman con AC ángulos iguales

(a). En el cuadrilátero cíclico AB'PC' $\angle C'B'A = \angle C'PA$

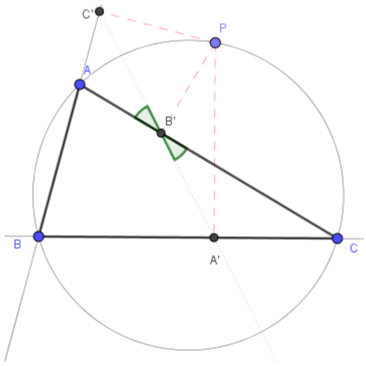
(b). En el cuadrilátero cíclico $A'B'PC$ $\angle A'B'C = \angle A'PC$

como

$$\angle A'PC = \angle C'PA$$

podemos concluir

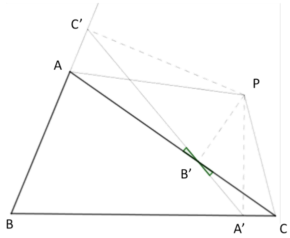
$$\angle C'B'A = \angle A'B'C$$



entonces que $A'B'C'$ estan alineados.

Recíprocamente si A', B', C' estan alineados, entonces

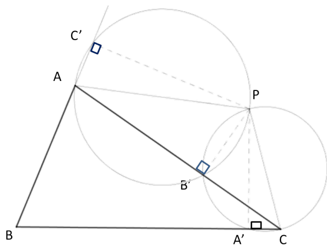
$$\angle C'B'A = \angle A'B'C$$



por ser ángulos opuestos por el vértice.

También tenemos que

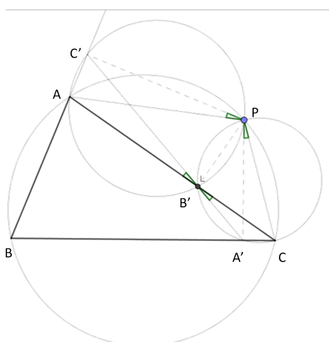
1. El cuadrilátero $\square A'B'CP$ es cíclico si tomamos PC como diámetro
2. El cuadrilátero $\square AB'PC'$ es cíclico pues sus ángulos opuestos son suplementarios



$$\angle PB'C + \angle PA'C = 180$$

tenemos entonces

$$\angle A'PC = \angle A'B'C = \angle AB'C' = \angle C'PA$$



en consecuencia

$$\angle A'PC = \angle C'PA$$

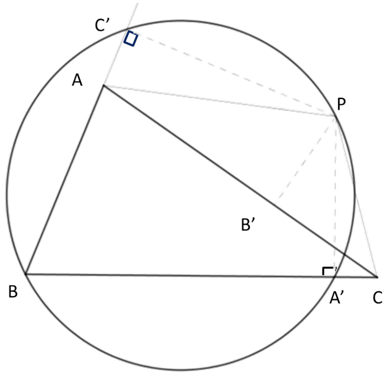
por lo que

$$\angle APC = \angle A'PC + \angle A'PA = \angle C'PA + \angle A'PA = \angle C'PA'$$

es decir

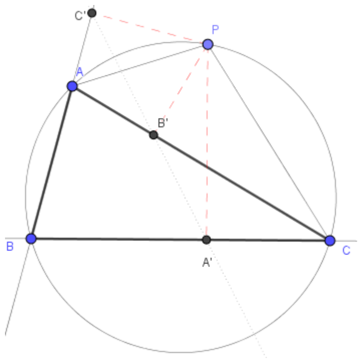
$$\angle APC = \angle C'PA' \tag{1.6}$$

Como el cuadrilátero $\square A'BC'P$ es cíclico pues sus ángulos opuestos son suplementarios



Se tiene entonces $(1{,}6)$ que $\angle APC = \angle C'PA'$ es suplementario de $\angle C'BA' = \angle ABC$, es decir

$$\angle APC + \angle ABC = 180$$



por lo tanto el cuadrilátero $\square ABPC$ es cíclico ■

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Los lados AB, BC y CA del $\triangle\, ABC$ están cortados por una transversal en los puntos Q, R y S, respectivamente. Los circumcírculos de $\triangle\, ABC$ y $\triangle\, SCR$ se intersecan en el punto P. Demuestre que el cuadrilátero $\square\, APSQ$ es cíclico.