GEOMETRÍA MODERNA

Notas del curso Geometría Moderna 1

Unidad 1

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

1. Unidad 1. Geometría del triángulo **1**

1.1. Teorema de Euler 1

Capítulo 1 Problemas para pensar 3

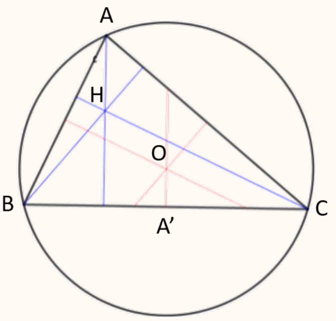
Capítulo 1 Unidad 1. Geometría del triángulo

1.1 Teorema de Euler

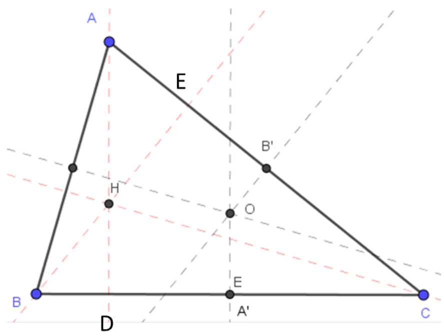
Lema 1.1 (Propiedad del ortocentro y el circuncentro)

Consideremos un triángulo $\triangle ABC$. Sean H su ortocentro, O su circuncentro y A' el punto medio del lado BC, entonces se tiene que

$$AH = 2A'O$$

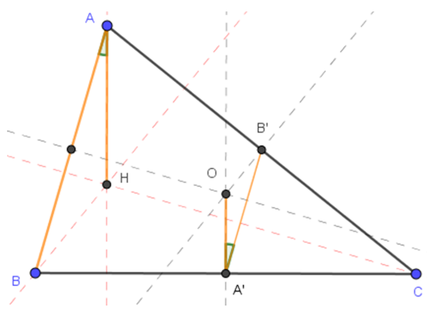


Demostración Trazamos AD altura por A, BE altura por B, OA' mediatriz de BC y OB' mediatriz por AC



Tenemos entonces que

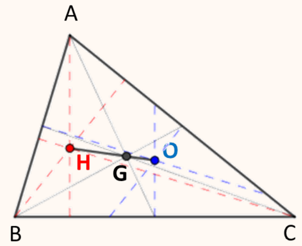
1. AB es paralela a A'B' pues une los puntos medios
2. AH es perpendicular a BC y A'O es perpendicular a BC
3. según lo anterior AH es paralela a A'O
4. $\angle BAH = \angle OA'B'$
5. Por el criterio de semejanza LAL se tiene que los triángulos ABH y A'B'O son semejantes



Como $AB = 2A'B'$ entonces $\dfrac{AB}{A'B'} = 2$ en particular $AH = 2A'O$ ■

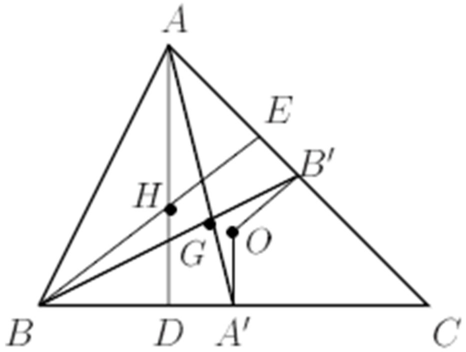
Teorema 1.1 (Teorema de Euler)

En un triángulo $\triangle ABC$, el ortocentro H, centroide G y el circuncentro O son colineales. La recta donde se encuentran estos punto se conoce como la ***recta de Euler****.*



♡

Demostración Trazamos dos medianas AA', BB' para localizar el centroide G,dos alturas AD y BE para localizar el ortocentro H. Por el lema anterior tenemos que $AH = 2A'O$; como G es el centroide sabemos que $AG = 2GA'$, finalmente AH y A'O son ambas perpendiculares a BC, se tiene que son paralelas y entonces $\angle HAG = \angle OA'G$



lo anterior es suficiente para garantizar que los triángulos HAG y OA'G son semejantes, en particular tenemos que

$$\angle HGA = \angle OGA'$$

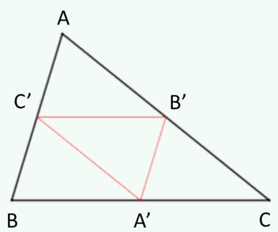
luego H, G y O son colineales. ■

En la figura de la demostración se tiene que los triángulos $\triangle HAG$ y $\triangle OA'G$ son semejantes en razón 2 a 1, con esto se puede asegurar que

$$HG = 2GO$$

Definición 1.1 (Triángulo Medial)

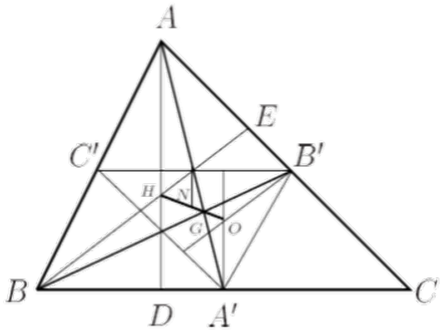
En un triángulo $\triangle ABC$, si unimos los puntos medios A', B' y C' de los lados BC, CA y AB respectivamente, se forma un triángulo $A'B'C'$ semejante al triángulo $\triangle ABC$, con razón de semejanza 2 a 1, llamado ***triángulo medial***



♣

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Sea N el circuncentro del triángulo medial $\triangle A'B'C'$ del triángulo $\triangle ABC$. Pruebe que $OG = 2GN$.



2. Pruebe que N es el punto medio del segmento OH.
3. ¿Es cierto o falso que el circunradio del triángulo $\triangle A'B'C'$ es la mitad del circunradio del triángulo $\triangle ABC$