Facultad de Ciencias UNAM

GEOMETRÍA MODERNA

Notas del curso Geometría Moderna 1

Unidad 3

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

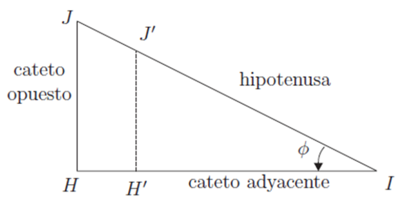
Capítulo 1 Unidad 3. Introducción a la geometría moderna

1.1 Trigonométria

Como hemos visto, los triángulos semejantes tienen sus tres ángulos interiores respectivamente iguales; si consideramos el conjunto de triángulos que tienen un ángulo recto, entonces, al fijar uno de los otros ángulos obtendremos todo un conjunto de triángulos semejantes, puesto que el tercer ángulo tendrá que ser el suplementario de los dos conocidos. Como los triángulos semejantes tienen sus lados proporcionales, si conocemos la razón de dos lados de uno de los elementos de un conjunto de triángulos semejantes, conoceremos la razón correspondiente de todos los demás. Esta propiedad nos permite establecer las razones de los lados de cualquier triángulo rectángulo como función de uno de los ángulos no rectos.

1.2 Razones Trigonométricas

En un triángulo rectángulo llamamos **hipotenusa** al lado opuesto al ángulo recto y catetos a los otros dos lados. Si fijamos uno de los ángulos agudos, por ejemplo el ángulo ϕ del triángulo rectángulo HIJ ilustrado en la figura, al cateto que delimita ese ángulo, HI, se le llama **cateto adyacente** y al otro cateto, JH, se le llama **cateto opuesto**.



Entonces, el seno del ángulo ϕ es el cociente del cateto opuesto (CO) entre la hipotenusa (h), el coseno del ángulo ϕ es el cociente del cateto adyacente (CA) entre la hipotenusa, y la tangente del ángulo ϕ es el cociente del cateto opuesto entre el cateto adyacente; en símbolos,

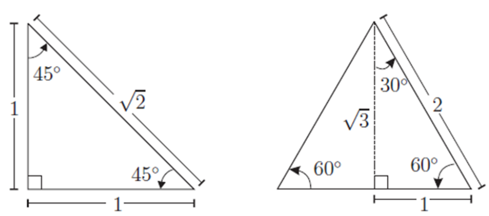
$$\sin\ \phi = \frac{CO}{hipotenusa}, \quad \cos\ \phi = \frac{CA}{hipotenusa}, \quad \tan\ \phi = \frac{CO}{CA}$$

Las razones recíprocas también reciben nombres especiales: la recíproca del seno de ϕ se denomina cosecante de ϕ y es el cociente de la hipotenusa entre el cateto opuesto, la razón recíproca del coseno se denomina secante y es el cociente de la hipotenusa entre el cateto adyacente, y la razón recíproca de la tangente se denomina cotangente y es el cociente del cateto adyacente entre el cateto opuesto; en símbolos

$$\csc\ \phi = \frac{hipotenusa}{CO}, \quad \sec\ \phi = \frac{hipotenusa}{CA}, \quad \cot\ \phi = \frac{CA}{CO}$$

Ejemplo 1.1 Calcular las razones trigonométricas de los ángulos de 30, 45 y 60.

Solución *Consideremos los siguientes triángulos*

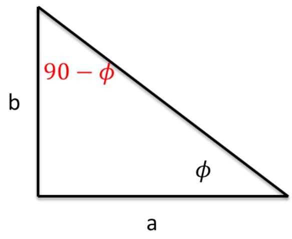


Según las razones dadas tenemos entonces que

ángulo	sen	cos	tan	csc	sec	cot
$30°$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$	2	$2/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$45°$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$60°$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$	2	$1/\sqrt{3}$

■

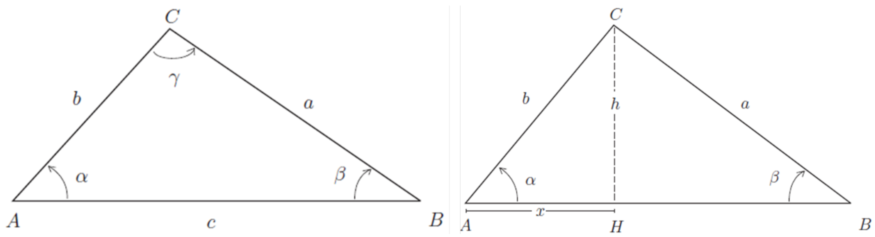
Ejemplo 1.2 Si en lugar de fijarnos en el ángulo ϕ utilizamos el otro ángulo agudo, $90 - \phi$, llamado ángulo complementario, es inmediato obtener las relaciones siguientes



$$\begin{aligned} \cos(90-\phi) &= \frac{b}{hipotesusa} = \text{sen } \phi \\ \text{sen}(90-\phi) &= \frac{a}{hipotenusa} = \cos\ \phi \\ \tan(90-\phi) &= \frac{a}{b} = \cot\ \phi \end{aligned}$$

es decir, dados dos ángulos complementarios el seno de uno es el coseno del otro y la tangente de uno es la cotangente del otro. ■

Ejemplo 1.3 ***Ley de los Senos*** Dado un triángulo cualquiera, denotaremos por A, B y C sus vértices, por $\alpha,\ \beta$ y γ los ángulos correspondientes (y también sus medidas), y por a, b y c los respectivos lados opuestos (y sus medidas), como en la figura siguiente.



Al trazar la altura desde un vértice cualquiera, por ejemplo C, se determinan dos triángulos rectángulos con ángulo recto en H, el pie de la altura. Tenemos entonces

$$\text{sen } \alpha = \frac{h}{b} \quad y \quad \text{sen } \beta = \frac{h}{a}$$

y, en consecuencia, $b\,\text{sen } \alpha = a\,\text{sen } \beta$. Por lo tanto

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta}$$

Se usa un razonamiento análogo para mostrar que

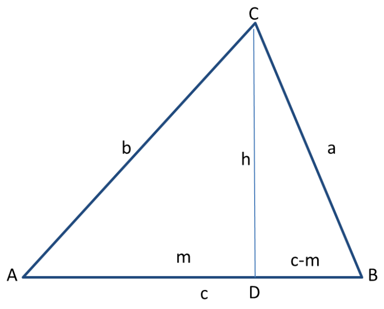
$$\frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma}$$

lo cual da lugar a la llamada Ley de los senos:

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma}$$

■

Ejemplo 1.4 ***Teorema generalizado de Pitágoras*** Tenemos que



Dado un triángulo $\triangle ABC$ trazamos la altura CD y formamos dos triángulo rectángulos

Para el triángulo rectángulo $\triangle CDB$ se tiene

$$a^2 = (c-m)^2 + h^2 = c^2 - 2cm + m^2 + h^2$$

Para el triángulo rectángulo $\triangle ADC$ se tiene

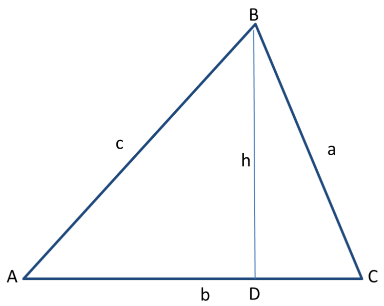
$$b^2 = m^2 + h^2 \;\Rightarrow\; b^2 - m^2 = h^2$$

por lo tanto

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cm$$

■

Ejemplo 1.5 ***Ley de Cosenos*** Tenemos que



Dado un triángulo $\triangle ABC$ trazamos la altura BD

Según el teorema generalizado de pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bAD$$

Por otro lado se tiene

$$\cos A = \frac{AD}{c} \;\Rightarrow\; c\ \cos A = AD$$

por lo tanto

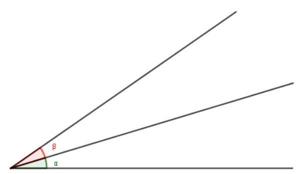
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos A$$

Con un proceso similar se obtiene

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos C$$

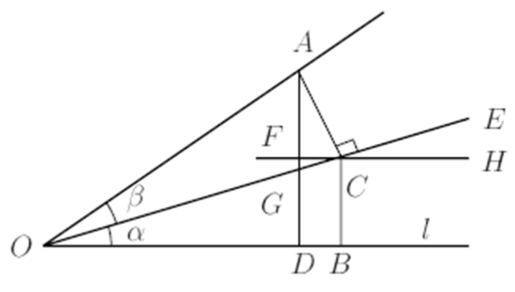
■

Ejemplo 1.6 Obtener el coseno de un ángulo que está dado como la suma de otros dos



$$\cos \alpha + \beta = \cos\ \alpha\ \cos\ \beta - \text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ \beta$$

Solución *Consideremos los triángulos rectángulos:*



$$\triangle\, OAD \; para \; el \; ángulo \; \alpha+\beta$$

$$\triangle\, OBC \; para \; el \; ángulo \; \alpha$$

$$\triangle\, OAC \; para \; el \; ángulo \; \beta$$

Entonces, si aplicamos la definición de coseno en el $\triangle\, OAD$ *y trazamos FC paralela a DB tenemos*

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{OD}{OA}=\frac{OB-BD}{OA}$$

y utilizando el $\triangle\, OBC$*,*

$$\cos\ \alpha=\frac{OB}{OC}\ \Rightarrow\ OB=OC\ \cos\ \alpha$$

También podemos expresar FC en términos de α*, pues como AD es perpendicular a OB,*$\angle\, ACF=90-\alpha$ *por lo que*

$$\text{sen}\ \alpha=\cos(90-\alpha)=\cos\ \angle\, ACF=\frac{FC}{AC}\ \Rightarrow\ FC=AC\ \text{sen}\ \alpha$$

Si sustituimos OB y FC obtenemos

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{OC\ \cos\ \alpha-AC\ \text{sen}\ \alpha}{OA}=\frac{OC\ \cos\ \alpha}{OA}-\frac{AC\ \text{sen}\ \alpha}{OA}$$

en el triángulo $\triangle\, OAC$ *se tiene*

$$\cos\ \beta=\frac{OC}{OA},\quad \text{sen}\ \beta=\frac{AC}{OA}$$

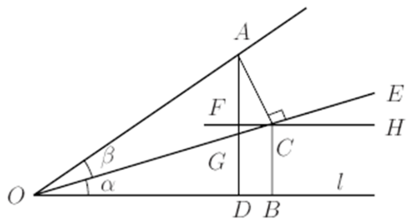
por lo tanto

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{OC\ \cos\ \alpha}{OA}-\frac{AC\ \text{sen}\ \alpha}{OA}=\cos\ \alpha\ \cos\ \beta-\text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ \beta$$

■

Ejemplo 1.7 Obtener el seno de un ángulo que está dado como la suma de otros dos

Solución *Consideremos los triángulos rectángulos:*



$$\triangle\, OAD \; para \; el \; ángulo \; \alpha+\beta$$

$$\triangle\, OBC \; para \; el \; ángulo \; \alpha$$

$$\triangle\, OAC \; para \; el \; ángulo \; \beta$$

Entonces, si aplicamos la definición de seno en el $\triangle\, OAD$ *y trazamos FC paralela a DB tenemos*

$$\text{sen}(\alpha+\beta)=\frac{AD}{OA}=\frac{AF+FD}{OA}=\frac{AF+CB}{OA}$$

y utilizando el $\triangle\, AGC$*,*

$$\frac{AF}{AC}=\text{sen}\ \angle\, ACD=\text{sen}\ (90-\alpha)=\cos\ \alpha\ \Rightarrow\ AF=AC\ \cos\ \alpha$$

También podemos expresar CB en términos de α*, pues como AD es perpendicular a OB,* $\angle\, ACF=90-\alpha$ *por lo que*

$$\cos\ \angle\, ACF=\cos(90-\alpha)=\text{sen}\ \alpha=\frac{CB}{OC}\ \Rightarrow\ CB=OC\ \text{sen}\ \alpha$$

Si sustituimos AF y CB obtenemos

$$\text{sen}(\alpha+\beta)=\frac{AF+CB}{OA}=\frac{AC\ \cos\ \alpha+OC\ \text{sen}\ \alpha}{OA}$$

en el triángulo $\triangle\, OAC$ *se tiene*

$$\cos\ \beta = \frac{OC}{OA}, \quad \text{sen}\ \beta$$

por lo tanto

$$\frac{AC\ \cos\ \alpha + OC\ \text{sen}\ \alpha}{OA} = \frac{AC}{OA}\cos\ \alpha + \frac{OC}{OA}\text{sen}\ \alpha = \text{sen}\ \beta \cos\ \alpha + \cos\ \beta\, \text{sen}\ \alpha$$

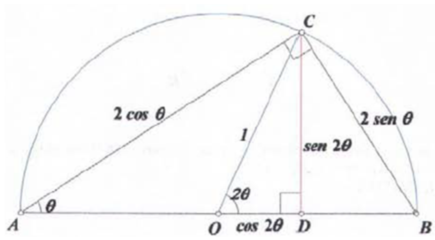
en consecuencia

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\ \beta \cos\ \alpha + \cos\ \beta\, \text{sen}\ \alpha$$

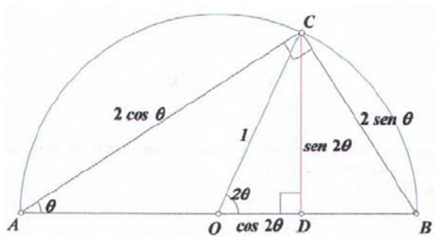
■

Capítulo 1 Problemas para pensar

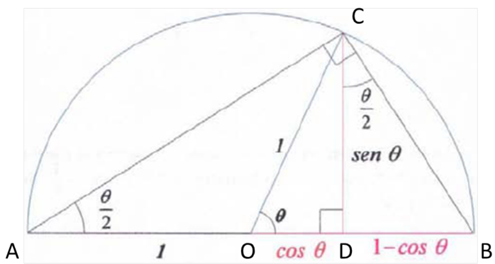
1. Use la figura para hallar una fórmula trigonométrica para $\text{sen}(2\theta)$



2. Use la figura para hallar una fórmula trigonométrica para $\cos(2\theta)$



3. Use la figura para hallar una fórmula trigonométrica para $\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$



4. Use la figura para mostrar que

$$\text{sen}^2\,\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\ \theta}{2} \quad y \quad \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos\ \theta}{2}$$