Relaciones Funcionales

Sean A, B dos conjuntos no vacíos, que llamaremos dominio y contradominio respectivamente. Entenderemos por función de A en B toda regla que hace corresponder a cada elemento del dominio (A) un único elemento del codominio (B).
Para denotar que f es una función de A en B, se escribe

$$f : A \to B$$

se lee **f es una función con dominio A y codominio B**

Definición 1. *f es una función de A en B si y solo si f es una relación entre A y B tal que todo elemento de A tiene un único correspondiente en B*

Ejemplo Sean A, B conjuntos dados por

$$A = \{-1, 0, 1, 2\}, \quad B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

y sea f la relación dada por $(x, y) \in f \;\Leftrightarrow\; y = x^2$
entonces se tiene que

$$f = \{\ (-1, 1),\ (0, 0),\ (1, 1),\ (2, 4)\ \}$$

ya que cada componente es el cuadrado de la primera Tenemos que todo elemento del dominio (A) tiene un correspondiente en el codominio (B), y además tal correspondiente es único en el sentido de que no se tienen dos pares ordenados distintos con la misma primera componente por tanto f es una función de A en B.
Observación: Puede ocurrir que elementos distintos del dominio (A) les corresponda un mismo elemento en el codominio (B), como ocurre con $-1,\ 1$, cuyos elemento correspondiente en el contradomino (B) es 1; además puede ocurrir que elementos del contradomino (B) no tengan un corrrespondiente elemento en el dominio (A), como ocurre con $2,\ 3$

Definición 2. *f es una función de A en B si y solo si f es un subconjunto de $A \times B$ que satisface las siguientes condiciones de existencia y unicidad*

$$i) \;\; \forall\ a \in A,\ \exists\ b \in B \ tal \quad que \;\; (a, b) \in f$$

$$ii) \;\; (a, b) \in f \;\wedge\; (a, c) \in f \;\Rightarrow\; b = c$$

Si $(a, b) \in f$ decimos que $b \in B$ es el correspondiente de $a \in A$ y suele escribirse $b = f(a)$, es decir, b es el transformado de a por la función f.

Ejemplo Sean

$$A = \{a, b, c, d\} \quad B = \{1, 2, 3\}$$

determinar si la siguiente relación

$$f = \{(a, 1),\ (b, 2),\ (c, 2),\ (d, 1)\}$$

es función.

Solución Tenemos que se cumplen las condiciones de la definición, y resulta que f es una función tal que

$$f(a) = 1, \quad f(b) = 2, \quad f(c) = 2, \quad f(d) = 1$$

Ejemplo Sean

$$A = \{a, b, c, d\} \quad B = \{1, 2, 3\}$$

determinar si la siguiente relación

$$f = \{(a, 1),\ (a, 2),\ (b, 2),\ (c, 1)\}$$

es función.

Solución Tenemos que no se cumple la condicion i, ya que no todo elemento del dominio (A) tiene un correspondiente elemento en el codomino (B) pues d carece de elemento en el domino (A).
También ii no se cumple pues un mismo elemento del dominio (A) tiene dos corrrspondientes en el codominio (B)
por lo tanto ésta relación f no es función

Funciones Inyectivas

Sea una función $f : A \to B$. Si ocurre que elementos distintos del dominio (A) tienen imagenes distintas en el codominio (B), entonces f se llama **función inyectiva, biunívoca, o uno a uno**

Definición 3. *Una función $f : A \to B$ se dice que es inyectiva, biunívoca ó uno-uno si:*

$$\forall\ x_1, x_2 \in A \quad tal \quad que \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Equivalentemente, mediante la implicación contrarreciproca, podemos decir Una función $f : A \to B$ se dice que es inyectiva, biunívoca ó uno-uno si:

$$\forall\ x_1, x_2 \in A \quad tal \quad que \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Ejemplo Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(x) = 2x$.
Para ver que f es inyectiva

$$Sean \quad x_1, x_2 \in Dom_f \quad tal \quad que \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \therefore \quad f \quad es \quad inyectiva$$

Ejemplo Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$
Para ver que f es inyectiva
Sean $x_1, x_2 \in Dom_f$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$ es decir

$$x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow (x_1^3 - x_2^3) = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2\right) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \quad o \quad x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0$$

Si $x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$
Suponga ahora que

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0 \ \Rightarrow \ x_1^2 + x_2^2 = -x_1x_2 \ \Rightarrow \ x_1,\ x_2 \ \ tienen \ \ signo \ \ distintos \ \ (1)$$

por otro lado

$$x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; (x_1+x_2)^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_1x_2 \geq 0 \;\Rightarrow\; x_1x_2 \geq 0$$

lo cual según (1) no puede ocurrir, por lo tanto $x_1 = x_2$
Otra forma de trabajar esta parte sería

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{-x_2 \pm \sqrt{x_2^2 - 4x_2^2}}{2} = \frac{-x_2 \pm \sqrt{-3x_2^2}}{2}$$

por lo tanto

$$x_1 = x_2\left(\frac{-1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Si $x_2 = 0$ entonces $x_1 = 0$ y resulta $x_1 = x_2$.
Estos son los únicos valores reeales que satisfacen, y en consecuencia f es inyectiva

Ejemplo Considerese la $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\;f(x) = 2x+1$, se tiene que, f es inyectiva pues si $x_1, x_2 \in$ Dom$f$ son tales que $x_1 \neq x_2 \quad\Rightarrow\quad 2x_1 \neq 2x_2 \quad\Rightarrow\quad 2x_1 + 1 \neq 2x_2 + 1 \quad\Rightarrow\quad f(x_1) \neq f(x_2)$

Ejemplo Considerese la función $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ $\;f(x) = \dfrac{3x-2}{x-1}$, se tiene que f es inyectiva pues para

$x_1, x_2 \in$ Dom$f$ tal que $x_1 \neq x_2 \quad\Rightarrow\quad 3x_1 \neq 3x_2 \quad\Rightarrow\quad 3x_1 - 2 \neq 3x_2 - 2$.............................. 1)

Y tambien se tiene que

$x_1 \neq x_2 \quad\Rightarrow\quad x_1 - 1 \neq x_2 - 1 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{1}{x_1-1} \neq \dfrac{1}{x_2-1}$... 2)

Por 1) y 2) $\quad \dfrac{1}{x_1-1}(3x_1-1) \neq (3x_2-1)\dfrac{1}{x_2-1} \quad\Rightarrow\quad f(x_1) \neq f(x_2)$

Función Suprayectiva

Sea una función $f : A \to B$. Si ocurre que todo elemento del codominio (B) es imagen de algún elemento del dominio (A), la función se llama suprayectiva, sobreyectiva

Definición 4. *Una función $f : A \to B$ se dice que es suprayectiva si:*

$$\forall y \in B \quad \exists x \in A \quad tal \quad que \quad y = f(x)$$

en el caso de la sobreyactividad, el conjunto de las imagenes se identifica con el codominio (B) de la función

Ejemplo Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = -x + 1$. Para ver que es suprayectiva tenemos que

$$\forall\ y \in \mathbb{Z}\ \Rightarrow\ y = f(x)\ \Rightarrow\ y = -x + 1\ p\ a\ x \in \mathbb{Z}\ \Rightarrow\ x = 1 - y$$

por lo tanto

$$f(x) = f(1 - y) = -(1 - y) + 1 = -1 + y + 1 = y$$

y f es sobreyectiva

Ejemplo Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$. Para ver que es suprayectiva tenemos que

$$y \in \mathbb{R} \Rightarrow y = 2x \Rightarrow \frac{y}{2} = x$$

$\therefore$

$$f(x) = f\left(\frac{y}{2}\right) = 2\left(\frac{y}{2}\right) = y$$

por lo tanto f es suprayectiva,

Ejemplo Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + 1$ es una función suprayectiva pues dado $b \in\ B$ tenemos que $f(a) = b$ por tanto $2a + 1 = b \quad \Rightarrow \quad a = \frac{b-1}{2} \qquad \therefore\ f(a) = f(\frac{b-1}{2}) = 2(\frac{b-1}{2}) + 1 = b$

Ejemplo Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ es también una función suprayetiva pues si $b \in\ B$ entonces $f(a) = b \qquad \therefore\ a^3 = b \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[3]{b}$ y $f(a) = f(\sqrt[3]{b}) = (\sqrt[3]{b})^3 = b$

Función Biyectiva

Definición 5. *Una función $f : A \to B$ se dice que es biyectiva si es inyectiva y suprayectiva simultaneamente.*

Ejemplo La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x + 1$ es biyectiva pues:
Es inyectiva ya que

$$\forall\ a, b \in \mathbb{R}\ con\ a \neq b\ \Rightarrow\ -a \neq -b\ \Rightarrow\ -a + 1 \neq -b + 1\ \Rightarrow\ f(a) \neq f(b)$$

Es sobreyectiva pues

$$\forall\ y \in \mathbb{Z}\ \Rightarrow\ y = f(x)\ \Rightarrow\ y = -x + 1\ p\ a\ x \in \mathbb{Z}\ \Rightarrow\ x = 1 - y$$

por lo tanto

$$f(x) = f(1 - y) = -(1 - y) + 1 = -1 + y + 1 = y$$

por lo tanto al ser inyectiva y sobreyactiva, f es biyectiva

Composición de funciones inyectivas

Teorema 1. *Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones inyectivas, entonces $g \circ f : A \to C$ es inyectiva*

Demostración. sean $x_1, x_2 \in Dom_f$ tal que $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ se tiene entonces que

$$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

como g es inyectiva se tiene que $f(x_1) = f(x_2)$ y como f es inyectiva entonces $x_1 = x_2 \therefore g \circ f$ es inyectiva □

Teorema 2. *Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones suprayectivas, entonces $g \circ f : A \to C$ es suprayectiva*

Demostración. Hay que probar que $\forall z \in C\ \exists x \in A$ tal que $g \circ f(x) = z$, se tiene que por ser $g : B \to C$ sobre $\exists y \in B$ tal que $\forall z \in C\ g(y) = z$ dado que f es suprayectiva y $y \in B\ \exists x \in A$ tal que $f(x) = y$ por lo tanto $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. Por lo tanto dado $z \in C\ \exists x \in A$ tal que $g \circ f(x) = z$ □

Teorema 3. *Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son tales que $g \circ f : A \to C$ es inyectiva entonces f es inyectiva*

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in A$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$ aplicando g se obtiene $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ por ser $g \circ f$ inyectiva se tiene $x_1 = x_2$ en consecuencia f es inyectiva □

Teorema 4. *Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son tales que $g \circ f : A \to C$ es suprayectiva entonces g es suprayectiva*

Demostración. Sea $c \in C$ como $g \circ f$ es suprayectiva, existe α tal que

$$c = g \circ f(\alpha) = g(f(\alpha))$$

esto prueba que $c \in Im_g$ □

Teorema 5. *Sea f la función $f : A \to B$, entonces*
a) f es inyectiva si y solo si existe $g : B \to A$ tal que $g \circ f = I_A$

Demostración. Sea f inyectiva. Para cada $y \in f(A)$ existe un único $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Sea $a \in A$ fijo definimos $g : B \to A$ asi

$$g(y) = \begin{cases} x & \text{si} \quad y \in f(A) \\ \\ a & \text{si} \quad y \notin f(A) \end{cases}$$

es claro que $(g \circ f)(y) = g(f(y)) = I_A$

□

Teorema 6. *Sea f la función $f : A \to B$, entonces*
a) f es suprayectiva si y solo si existe $h : B \to A$ tal que $f \circ h = I_B$

Demostración. Sea f suprayectiva. Para cada $y \subseteq B\ f^{-1}(y) \neq \emptyset$, para $y \subset B$ escogemos $x \in f^{-1}(y)$ y definimos la función $h : B \to A$ como $h(y) = x$ en consecuencia $f \circ h = I_B$ □

Función Inversa

Toda función $f : A \to B$ es una relación; cabe preguntarse si la relación inversa es una función. En general la respuesta es negativa.

Ejemplo Sean A, B conjuntos dados por

$$A = \{-1, 0, 1, 2\}, \quad B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

y $f : A \to B$ es tal que $f(x) = x^2$, se tiene entonces que

$$f = \{(-1, 1),\ (0, 0),\ (1, 1),\ (2, 4)\}$$

de manera que la inversa de esta relación es el subconjnuto de $B \times A$

$$\{(1, -1),\ (0, 0),\ (1, 1),\ (4, 2)\}$$

como los elementos $2, 3 \in B$ carecen de imagenes en A, entonces esta relación no es función. Además no se cumple la condición de unicidad ya que el $1 \in B$ tiene dos corrrespóndientes en A, a saber $-1, 1$

Ejemplo Sean A, B conjnutos dados por

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{a, b, c\} \quad y \quad f = \{(1, a),\ (2, c),\ (3, b)\}$$

una función de A en B. La relación inversa es

$$g = \{(a, 1),\ (b, 3),\ (c, 2)\}$$

es claramente una función de B en A, llamada función inversa de f.
La composición

$$g \circ f = \{(1, 1),\ (2, 2),\ (3, 3)\} = I_A$$

La función g se llama inversa izquierda de f La composición

$$f \circ g = \{(a, a),\ (b, b),\ (c, c)\} = I_B$$

La función g se llama inversa derecha de f

La función $f : A \to B$ admite inversa si y solo si existe $g : B \to A$ tal que

$$g \circ f = I_A \quad y \quad f \circ g = I_B$$

Si una función $f : A \to B$ tiene las dos inversas, entonces ambas coinciden

$$g = g \circ I_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = I_A \circ h = h$$

g=h se llama inversa de f.
Ejemplo.-La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + 2$ admite inversa $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x - 2$ pues

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x + 2) = (x + 2) - 2 = x = Id_{\mathbb{R}}$$
$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x - 2) = (x - 2) + 2 = x = Id_{\mathbb{R}}$$

Teorema 7. *Una función admite inversa si es biyectiva*

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in A$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$ aplicamos g y obtenemos

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \to (g \circ f)(x_1) = (g \circ f(x_2)) \to x_1 = x_2$$

$\therefore f$ es uno-uno
Para ver que es uprayectiva sea $y \in B$ aplicando la función identidad

$$y = Id_B(y) = f \circ g(y) \to y = f(g(y))$$

por lo tanto si hacemos $x = g(y) \in A$ se tien que $f(x) = y$ $\therefore$ al ser f inyectiva y suprayectiva entonces f es biyectiva □

Teorema 8. *Una función que es biyectiva admite inversa*

Demostración. Definimos una función $g : B \to A$ mediante $g(y) = x$ si $f(x) = y$, tenemos que ver que g satisface la definición de función. En efecto todo elemento y del domino B tiene un correspondiente x en A, ya que, por se f sobreyectiva, todo y en B proviene de algún x en A. El correspondiente x asociado a y es único, por ser f inyectiva. En efecto si x_1, x_2 fueran distintos de y por f se tendría $x_1 \neq x_2$ y $f(x_1) = f(x_2) = y$, lo cual es absurdo pues f es inyectiva
Hay que ver que $g \circ f = Id_A$. Cualquiera que sea A se tiene

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x = Id_A(x)$$

Ahora probaremos que $(f \circ g)(y) = Id_B$ se tiene que

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y = Id_B(y)$$

Al tener inversa izquierda e inversa derecha entonces la función admite inversa y ademas es única pues si g' fuera inversa se tendría que

$$g' = g' \circ Id_B = g' \circ (f \circ g) = (g' \circ f) \circ g = Id_A \circ g = g$$

□

Ejemplo.-Probar que la función $f(x) = \frac{x}{1+x}$ admite inversa para $x > -1$
Para ver que es inyectiva se tiene que dados $x_1 \neq x_2 \in Dom_f$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$ se tiene entonces que

$$\frac{x_1}{1 + x_2} = \frac{x_1}{1 + x_2} \Rightarrow x_1 + x_1 \cdot x_2 = x_2 + x_2 \cdot x_1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

por lo tanto f es inyectiva
Para ver que f es suprayectiva sea $y \in Im_f$ tenemos que ver que existe $x \in Dom_f$ tal que $f(x) = y$. Si $f(x) = y$ entonces

$$\frac{x}{1 + x} = y \Rightarrow x = \frac{y}{1 - y}$$

por lo tanto para $y \in Im_f$ se tiene que existe $x = \dfrac{y}{1 - y} \in Dom_f$ tal que $f(x) = y$
Por tanto al ser f inyectiva y suprayectiva entonces f es biyectiva y por tanto admite una inversa