Facultad de Ciencias UNAM

VARIABLE COMPLEJA

Notas del curso Variable Compleja 1

Unidad 4

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Ofelia Cepeda Camargo & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 4. Series

1.1 Calculo de integrales

Ejemplo 1.1 Hemos visto que la evaluación de la integral

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\ \theta}, \quad a>0$$

haciendo la sustitución $z=e^{i\theta}$, de modo que

$$\cos\ \theta = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \tag{1.1}$$

En general, si tuviéramos que evaluar la integral de una función trigonométrica, podríamos hacer sustituciones de este tipo; así, si la función por integrar contiene un término $\operatorname{sen}\ \theta$, hacemos $z=e^{i\theta}$, entonces

$$\operatorname{sen}\ \theta = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$$

Por ejemplo, consideremos la integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\ 3\theta}{5-4\ \cos\ \theta}\, d\theta$$

Haciendo la sustitución $(1{,}1)$, tenemos que

$$\cos\ 3\theta = \frac{e^{3\theta i}+e^{-3\theta i}}{2} = \frac{1}{2}\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)$$

y

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\ 3\theta}{5-4\cos\ \theta}\, d\theta = \int_{|z|=1} \frac{\frac{1}{2}\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)}{5-\frac{4}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{iz} = -\frac{1}{4i}\int_{|z|=1} \frac{z^6+1}{z^3\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}dz$$

Es claro que el último integrando tiene un polo de orden 3 en 0 y polos simples en $\frac{1}{2}$, 2. Sólo tenemos que calcular los residuos en las dos primeras singularidades.

Es claro que

$$Res\left(\frac{z^6+1}{z^3\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}, \frac{1}{2}\right) = \lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(\frac{z^6+1}{z^3\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}\left(z-\frac{1}{2}\right)\right) = -\frac{65}{12}$$

Por otro lado, tenemos que

$$Res\left(\frac{z^6+1}{z^3\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}, 0\right) = \lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z^6+1}{z^3\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}z^3\right) = \frac{21}{4}$$

de modo que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\ 3\theta}{5-4\cos\ \theta}d\theta = -\frac{2\pi i}{4i}\left(-\frac{65}{12}+\frac{21}{4}\right) = \frac{\pi}{12} \quad \blacksquare$$

Además de integrales trigonométricas, el teorema del residuo nos permite calcular otros tipos de integrales. Por ejemplo, consideremos una integral real impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

Recordemos que hay dos maneras usuales de entender qué signi

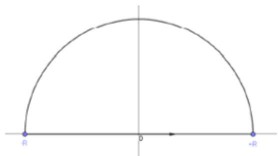
ca este símbolo: La primera consiste en partir a la recta real en dos, obteniendo dos integrales impropias, de modo que si ambas integrales convergen, entonces la expresión anterior tiene sentido:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{a} f(x)\, dx + \int_{a}^{r} f(x)\, dx$$

La segunda forma consiste en fijarse en una manera particular de tender a infinito:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f(x)\,dx$$

Es esta segunda forma la que usaremos. En este caso, cuando el límite anterior existe, le llamaremos el valor principal de Cauchy de la integral. Todas las integrales que consideraremos se calcularán en este sentido.
Para aplicar el teorema del residuo, la idea general será la siguiente: Extendemos la función f al plano complejo, lo que por lo general lograremos de manera natural. Luego, integraremos la función f(z) a lo largo de una curva γ_R, $R > 0$, como la que se muestra en la Figura



es decir, la curva que se obtiene al tomar el segmento de recta $(-R, R)$ sobre el eje real seguido de la semicircunferencia C_R dada por $z = R^{ei\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$.
Por el teorema del residuo, la integral de f a lo largo de γ_R es el producto de $2\pi i$ por la suma de los residuos de las singularidades de f en el interior de γ_R. Al hacer R tender a infinito, obtendremos por un lado el producto de $2\pi i$ por la suma de los residuos de las singularidades de f en el semiplano superior. Por otro lado, la idea es imponer condiciones adecuadas a f para que la integral sobre la semicircunferencia C_R tienda a cero cuando $R \to \infty$.
¿A qué nos referimos con condiciones adecuadas? Pongamos un ejemplo para entender cómo obtenerlas.
Consideremos una función racional, es decir, un cociente de polinomios, $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Si queremos calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

entonces podemos extender la función de manera natural al plano complejo.
Ahora, para poder aplicar el teorema del residuo a $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, debería ocurrir, al menos, que el grado k de P sea menor al grado m de Q. Además, queremos que la integral sobre la semicircunferencia C_R se vaya a cero. Hagamos una estimación preliminar de esta integral para que sea claro que debemos imponer una condición un poco más fuerte:

$$\left|\int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dw\right| \le \int_{C_R} \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right|\,|dw|$$

si $k < m$, entonces $\left|\dfrac{P(z)}{Q(z)}\right| \to 0$ cuando $R \to \infty$, de modo que si R es sufcientemente grande, $\left|\dfrac{P(z)}{Q(z)}\right| < \epsilon$; pero esto sólo dice que el módulo de la integral es menor que

$$\int_{C_R} \epsilon\,|dw| = \epsilon \cdot long(C_R) = \epsilon \cdot \pi R$$

de modo que no podemos garantizar que lo anterior tienda a cero cuando $R \to \infty$. En cambio, sí lo podemos garantizar si el grado k de P es menor que $m-1$, donde m es el grado de Q. Por supuesto, esto es equivalente a que k sea menor o igual a $m-2$. En resumen,

Teorema 1.1

Sea $f(z)$ una función racional tal que

- *$f(z)$ no tiene polos sobre el eje real.*
- *El grado del denominador excede, al menos por dos, al grado del numerador.*

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{Im\ z_0>0} Res(f(z), z_0)$$

Ejemplo 1.2 Consideremos la función

$$\frac{1}{(z^2+a^2)^2}, \quad a>0$$

que es una función racional y satisface las condiciones del teorema anterior. La función tiene un polo doble en cada una de sus singularidades $\pm ai$ y el residuo correspondiente es $\pm\frac{\pi}{4a^3 i}$. Como sólo el punto ai está en el semiplano superior y la función es par,

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \pi i\ Res\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^2}, ai\right) = \frac{\pi}{4a^3} \blacksquare$$

Veamos otro ejemplo en que podemos calcular integrales impropias reales por medio del teorema del residuo y un proceso de límite. La motivación es similar al caso que acabamos de ver, aunque ahora daremos la demostración después del enunciado.

Teorema 1.2

Sea f(z) una función racional tal que

1. *$f(z)$ no tiene polos sobre el eje real.*
2. *El grado del denominador excede, al menos por dos, al grado del numerador.*

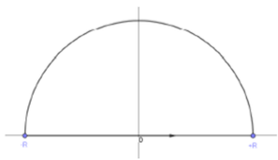
Entonces para cada $a \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \cos\ ax\, dx = Re\left(2\pi i \sum_{Im\ z_0>0} res(f(z)e^{iaz}, z_0)\right)$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \text{sen}\ ax\, dx = Im\left(2\pi i \sum_{Im\ z_0>0} res(f(z)e^{iaz}, z_0)\right)$$

Demostración Sea γ_R la curva de la Figura



Puesto que f es un cociente de polinomios, sus polos, al igual que los de $f(z)e^{iaz}$, ocurren sólo en los ceros del denominador y por tanto son un número finito. Si elegimos R suficientemente grande, todos los polos de $f(z)$ que estén en el semiplano superior estarán en el interior de γ_R. Entonces, por el teorema del residuo,

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{Im\ z_0>0} Res\left(f(z)e^{iaz}, z_0\right) &= \int_{\gamma_R} f(z)e^{iaz}\, dz \\ &= \int_{-R}^{R} f(x)e^{iax}\, dx + \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})e^{iaRe^{i\theta}} iRe^{i\theta}\, d\theta \end{aligned}$$

Observemos que la segunda condición del teorema implica que $\left|z^2 f(z)\right|$ está acotada por una constante $M > 0$ en todos los puntos del semiplano superior. Así,

$$\left|\int_0^\pi f(Re^{i\theta})e^{iaRe^{i\theta}} iRe^{i\theta}\, d\theta\right| \leq \frac{M}{R}\int_0^\pi e^{-aR\operatorname{sen}\,\theta} d\theta \leq \frac{M\pi}{R}$$

piesto que $e^{-aR\operatorname{sen}\,\theta} \leq 1$. Así, cuando $R \to \infty$, tendremos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}dx = 2\pi i \sum_{Im\ z_0>0} Res\left(e^{iaz}, z_0\right), \quad a \geq 0 \tag{1.2}$$

Finalmente, basta tomar las partes real e imaginaria en ambos lados de (1,2) para obtener el resultado. ■

Ejemplo 1.3 Calcularemos

$$\int_0^\infty \frac{\cos\ ax}{x^2+b^2}dx, \quad a \geq 0, \quad b > 0$$

La función racional $f(z) = \dfrac{1}{z^2+b^2}$ satisface las condiciones del teorema.
Notemos que los polos de f(z) son $\pm bi$. Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\ ax}{x^2+b^2}dx = Re\left(2\pi i\ Res\left(\frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}, bi\right)\right) = \frac{\pi}{b}e^{-ab}$$

Como $\dfrac{\cos\ ax}{x^2+b^2}$ es una función par, se sigue que

$$\int_0^\infty \frac{\cos\ ax}{x^2+b^2}dx = \frac{\pi}{2b}e^{-ab}$$

Además como $\dfrac{\operatorname{sen}\ ax}{x^2+b^2}$ es una función impar, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\ ax}{x^2+b^2}dx = 0$$

aunque no podremos asegurar nada de

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\ ax}{x^2+b^2}dx \quad ■$$