VARIABLE COMPLEJA

Notas del curso Variable Compleja 1

Unidad 4

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Ofelia Cepeda Camargo & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 4. Series

1.1 Series de Laurent

En esta parte se estudia una generalización de las series de Taylor. Como sabemos, una serie de Taylor es una serie de potencias con potencias positivas. En el caso de las **series de Laurent**, permitimos el uso de potencias negativas. Podemos formalizar esto como sigue.

Definición 1.1 (Series de Laurent)

*Una **serie de Laurent** con centro en $z_0 \in \mathbb{C}$ es una expresión de la forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} \tag{1.1}$$

donde los coeficientes $a_n,\ b_n \in \mathbb{C}$. ♣

Decimos que la primera serie es la **parte regular** de la **serie de Laurent**, mientras que la segunda serie es su **parte singular**. La **serie de Laurent converge** si sus **partes regular y singular convergen**.
¿Cómo analizar la convergencia de una **serie de Laurent**? Sabemos que **la parte regular es una serie de potencias**, por lo que existe su radio de convergencia R y la serie converge para $|z - z_0| < R$. En cuanto a **la parte singular**, observemos que también podemos escribirla como una serie de potencias:

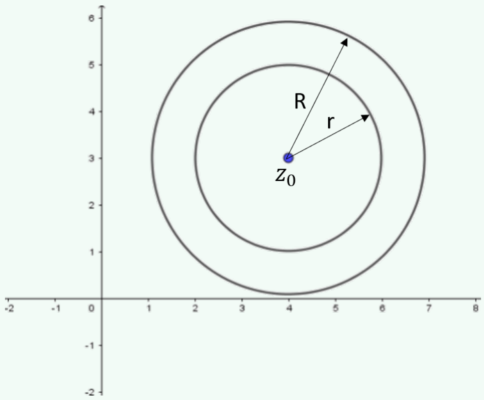
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n$$

donde $\dfrac{1}{(z-z_0)}$. Esta serie de potencias también tiene su radio de convergencia, que llamaremos $\dfrac{1}{r}$, tal que si $|w| < \dfrac{1}{r}$, la serie converge. Esto nos dice que la parte singular converge si $|z - z_0| > r$. Entonces la serie de Laurent convergerá para los $z \in \mathbb{C}$ que satisfagan a la vez $|z - z_0| < R$ y $|z - z_0| > r$. Por supuesto, si $R \leq r$, el conjunto de z que satisfacen ambas condiciones es vacío, de modo que a partir de ahora supondremos que $r < R$.

Definición 1.2

Sean $r, R \in \mathbb{R} \cup \{0, \infty\}$ tales que $r < R$. El anillo (abierto) con centro z_0 y radios r, R es el conjunto

$$A_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$$



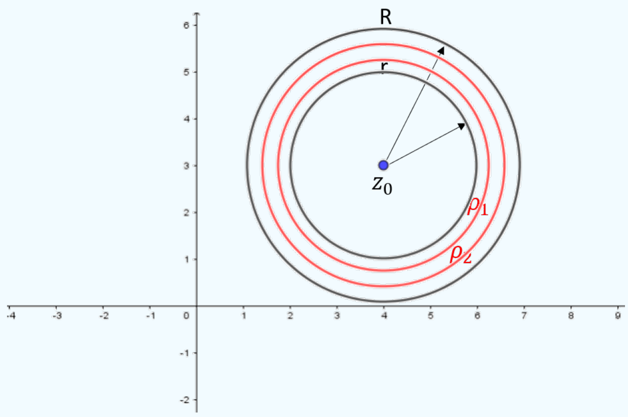
♣

Comentario El caso $r = 0$ será importante al estudiar las singularidades de una función.

Proposición 1.1

Sean $\frac{1}{r}$ y R los radios de convergencia de las series $\sum b_n w^n$ y $\sum a_n w^n$, respectivamente. Supongamos que $r < R$. Entonces la serie de Laurent (1,1) converge en el anillo $A_{r,R}(z_0)$.
Además, la convergencia de la serie de Laurent es uniforme en cualquier anillo cerrado contenido en el anillo $A_{r,R}(z_0)$; es decir, en

$$\overline{A_{\rho_1,\rho_2}(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid r < \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2 < R\}$$



♠

Demostración En realidad, sólo falta analizar qué ocurre con la convergencia uniforme. Como R es el radio de convergencia de la parte regular de la serie, sabemos que la convergencia de esta parte regular es uniforme en cualquier disco cerrado $\overline{D(z_0, \rho_2)}$ contenido en $D(z_0, R)$. Análogamente, como $\frac{1}{r}$ es el radio de convergencia de $\sum b_n w^n$, esta serie converge de manera uniforme en cualquier disco cerrado $|w| \leq \frac{1}{\rho_1}$, lo que implica que la parte singular de la serie de Laurent converge de manera uniforme si $|z - z_0| > \rho_1$. Al reunir la información de ambas partes, obtenemos el resultado. ■

Corolario 1.1

Bajo las condiciones de la proposición anterior, la serie de Laurent $(1{,}1)$ *define una función analítica en el anillo* $A_{r,R}(z_0)$.

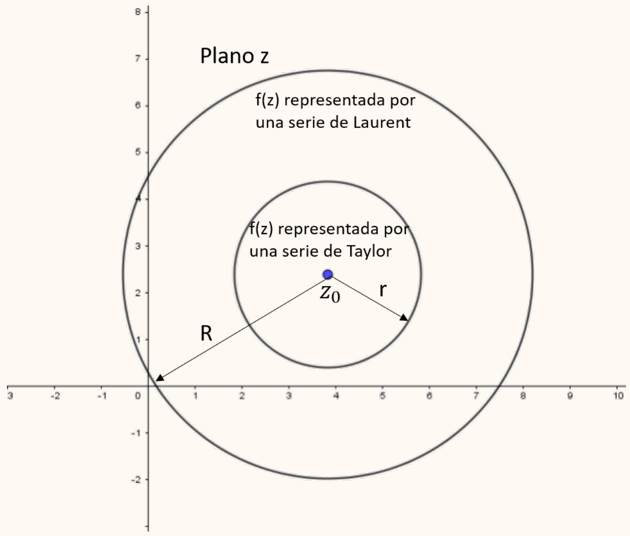
♡

Nuestro objetivo ahora es demostrar una especie de recíproco de este corolario, a saber

Teorema 1.1 (Laurent)

Sea f una función analítica en el anillo $A_{r,R}(z_0)$. *Entonces f se escribe de manera única como una serie de Laurent* $(1{,}1)$*, donde los coeficientes están dados por*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw \quad y \quad b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(w)(w-z_0)^{n-1}\,dw$$



aquí γ *es una circunferencia con centro en* z_0 *y radio arbitrario* $\rho \in (r, R)$.

♡

Comentario Por el teorema de Cauchy, las integrales anteriores no dependen de la circunferencia elegida, siempre que esté contenida en el anillo.

Demostración Es fácil mostrar la unicidad de la serie de Laurent. Supongamos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

sustituimos w por z y dividimos entre $(w-z_0)^{k+1}$ para obtener

$$\frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-k-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^{n+k+1}}$$

gracias a la convergencia uniforme, podemos integrar término a término las dos series; pero observemos que la única integral que no se anula es aquella con potencia $(w-z_0)^{-1}$, que aparece en este caso en la parte regular de la serie, cuando $n = k$:

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw = a_n \int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} (w-z_0)^{-1}\,dw = 2\pi i a_n$$

Análogamente,

$$f(w)(w-z_0)^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(w-z_0)^{n+k-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(w-z_0)^{n-k+1}}$$

y al integrar obtenemos

$$\int_\gamma f(w)(w-z_0)^{k-1}\,dw = \int_\gamma \frac{b_k}{w-z_0}\,dw = 2\pi i b_k$$

como afirmábamos.

Para demostrar que f se puede escribir como una serie, consideramos una curva cerrada contenida en el anillo $A_{r,R}$. Sean

- $\gamma_j = z_0 + r_j e^{it}$, $j = 1, 2$, con $r < r_1 < r_2 < R$ y $t \in [0, 2\pi]$
- $\sigma_t = z_0 + t$, $t \in [r_1, r_2]$

La curva $\gamma = \gamma_2 - \sigma - \gamma_1 + \sigma$ es cerrada C^1 por partes y está contenida en el anillo. Entonces, aplicando la fórmula integral de Cauchy a los puntos en el interior de γ, usando el hecho de que $n(\gamma, z) = 1$ para tales puntos,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

Analizaremos cada una de las dos últimas integrales por separado; la primera dará lugar a la parte regular de la serie de Laurent y la segunda a la parte singular. La idea es tratar de escribir

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

como una serie de potencias alrededor de z_0. Si desarrollamos $\dfrac{1}{w-z}$ en serie de Taylor alrededor de z_0, tenemos

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0} + \frac{z-z_0}{(w-z_0)^2} + \cdots + \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} + \cdots$$

también podríamos haber procedido directamente, recordando que para una serie geométrica, $\sum a_n = \dfrac{1}{1-a}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{w-z_0}{w-z}$$

y la convergencia es uniforme (en w) para los puntos z en el interior de γ_2, pues en tal caso $\left|\dfrac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1$. En resumen, tenemos

$$\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw$$

Usamos esto y las propiedades de la convergencia uniforme para re-escribir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} f(w)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw\right)(z-z_0)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n
\end{aligned}$$

Procedemos de manera análoga con la parte singular, observando que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}} = -\frac{z-z_0}{w-z}$$

donde ahora la convergencia es uniforme en w para z en el exterior de γ_1. Así

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}\,dw &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} f(w)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}\,dw\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} f(w)(w-z_0)^{n-1}\,dw\right)\frac{1}{(z-z_0)^n}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}
\end{aligned}
$$

reuniendo la información, obtenemos la afirmación deseada. ■

Ejemplo 1.1 Obtenga las series de Laurent para las funciones f en los dominios indicados

- $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$ en el anillo $A_{a,b} : a < |z| < b$ donde $a, b \in \mathbb{R}$, $b > a$

Puesto que f es analítica en el anillo $A_{a,b} : a < |z| < b$, puede desarrollarse en una serie de Laurent válida en el anillo. Para obtener la serie, puede descomponerse en fracciones parciales, es decir, expresando f como

$$
f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)} = -\left(\frac{1}{b-a}\right)\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right) \quad para \quad a < |z| < b
$$

Puesto que

$$
\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n-1}}{z^n} \quad para \quad |z| > a
$$

$$
-\frac{1}{z-b} = \frac{1}{b}\frac{1}{1-\frac{z}{b}} = \frac{1}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{b}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{b^{n+1}} \quad para \quad |z| < b
$$

la serie pedida es

$$
f(z) = -\frac{1}{b-a}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{b^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n-1}}{z^n}\right) \quad para \quad a < |z| < b
$$

■