Facultad de Ciencias UNAM

VARIABLE COMPLEJA

Notas del curso Variable Compleja 1

Unidad 1

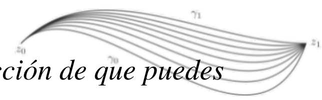
Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Ofelia Cepeda Camargo & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1



La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 1. Introducción

1.1 Potencia de un número complejo

Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ cuya forma polar esta dada por

$$z_1 = \rho_1(\cos\ \theta_1 + i \operatorname{sen}\ \theta_1)$$
$$z_2 = \rho_2(\cos\ \theta_2 + i \operatorname{sen}\ \theta_2)$$

La multiplicación de números complejos en forma polar esta dada por:

$$\boxed{z_1 z_2 = \rho_1\rho_2[\cos\ (\theta_1+\theta_2) + i(\operatorname{sen}\ (\theta_1+\theta_2))]}$$

por lo tanto el resultado de multiplicar dos números complejos es otro número complejo cuyo módulo es el producto de los módulos y cuyo argumento es la suma de los argumentos.

Ejemplo 1.1 En el caso de $z_1 = z_2$

- En el caso de
$$z_1 = \rho_1(\cos\ \theta_1 + i \operatorname{sen}\ \theta_1)$$
para z_1^2 se tiene
$$\begin{aligned} z_1^2 &= z_1 z_1 \\ &= \rho_1^2[\cos\ (\theta_1+\theta_1) + i(\operatorname{sen}\ (\theta_1+\theta_1))] \\ &= \rho_1^2[\cos\ (2\theta_1) + i(\operatorname{sen}\ (2\theta_1))] \end{aligned}$$
Por lo tanto
$$\boxed{z_1^2 = \rho_1^2[\cos\ (2\theta_1) + i(\operatorname{sen}\ (2\theta_1))]}$$

- En el caso de
$$z_1 = \rho_1(\cos\ \theta_1 + i \operatorname{sen}\ \theta_1)$$
para z_1^3 se tiene
$$\begin{aligned} z_1^3 &= z_1^2 z_1 \\ &= \rho_1^3[\cos\ (2\theta_1+\theta_1) + i(\operatorname{sen}\ (2\theta_1+\theta_1))] \\ &= \rho_1^3[\cos\ (3\theta_1) + i(\operatorname{sen}\ (3\theta_1))] \end{aligned}$$
Por lo tanto
$$\boxed{z_1^3 = \rho_1^3[\cos\ (3\theta_1) + i(\operatorname{sen}\ (3\theta_1))]}$$

- En el caso de
$$z_1 = \rho_1(\cos\ \theta_1 + i \operatorname{sen}\ \theta_1)$$
para z_1^n se tiene
$$\boxed{z_1^n = \rho_1^n[\cos\ (n\theta_1) + i(\operatorname{sen}\ (n\theta_1))]}$$

Por lo tanto si $z = r(\cos\ \theta + i \operatorname{sen}\ \theta)$, entonces se tiene la **fórmula de Moivre**, donde para cualquier entero n

Teorema 1.1 (Fórmula de Moivre)

Para $z = r(\cos\ \theta + i\,\text{sen}\ \theta)$ *y* $n \in \mathbb{N}$, *tenemos*

$$z^n = r^n(\cos\ (\theta) + i(\text{sen}\ (\theta)))^n = r^n(\cos\ (n\theta) + i(\text{sen}\ (n\theta))) \quad (n \in \mathbb{N})$$

♡

Demostración Aplicando un procedimiento como el descrito anteriormente obtenemos

$$z^n = \underbrace{r \cdot r \cdots r}_{n-veces}\left(\cos(\underbrace{\theta + \theta + \cdots + \theta}_{n-veces}) + i\,\text{sen}(\underbrace{\theta + \theta + \cdots + \theta}_{n-veces})\right)$$
$$r^n(\cos\ nt + i\,\text{sen}\ nt)$$

■

Comentario

a) Nosotros encontramos de nuevo que $|z^n| = |z|^n$

b) Si $r = 1$, entonces $(\cos + \theta + i\,\text{sen}\ \theta)^n = \cos\ n\theta + i\,\text{sen}\ n\theta$

c) Nosotros podemos escribir $\arg\ z^n = \{n\ \arg\ z + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Si $z^n = r^n(\cos\ (n\theta) + i(\text{sen}\ (n\theta)))$ entonces podemos definir z^{-n} como $\frac{1}{z^n}$. Así pues,

$$z^{-n} = \frac{1}{r^n(\cos\ (n\theta) + i(\text{sen}\ (n\theta)))}$$

Si en el lado derecho de la ecuación multiplicamos el numerador y el denominador por la expresión $\cos\ n\theta - i\,\text{sen}\ n\theta$, tendremos

$$z^{-n} = \frac{1}{r^n}\frac{\cos\ n\theta - i\,\text{sen}\ n\theta}{\cos^2 n\theta + \text{sen}^2\, n\theta} = r^{-n}[\cos\ n\theta - i\,\text{sen}\ n\theta]$$

Ahora bien, como $\cos\ n\theta = \cos\ -n\theta$ y $-\text{sen}\ n\theta = \text{sen}\ -n\theta$, obtenemos

$$z^{-n} = r^{-n}[\cos\ -n\theta + i\,\text{sen}\ -n\theta], \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Ejemplo 1.2 Vamos a calcular $(1 + i)^{1000}$.

Tenemos que la representación polar de $i + 1$ es $\sqrt{2}\left(\cos\ \frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\ \frac{\pi}{4}\right)$. Aplicando el teorema de Moivre se obtiene

$$(1 + i)^{1000} = \left(\sqrt{2}\right)^{1000}\left(\cos\ 1000\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\ 1000\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= 2^{500}(\cos\ 250\pi + i\,\text{sen}\ 250\pi) = 2^{500}$$

Ejemplo 1.3 A partir de la fórmula de Moivre podemos derivar algunas identidades trigonométricas bien conocidas. Por ejemplo, tomando $n = 2$

$$(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^2 = \cos\ 2\theta + i\,\text{sen}\ 2\theta$$

Desarrollando el lado izquierdo de la expresión anterior llegamos a

$$\cos^2\theta + 2i\,\text{sen}\,\theta\cos\theta - \text{sen}^2\,\theta = \cos\ 2\theta + i\,\text{sen}\ 2\theta$$

Igualando las partes correspondiente (real e imaginaria), obtenemos las dos identidades

$$\cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta = \cos\ 2\theta, \quad y \quad 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = \text{sen}\ 2\theta$$

1.2 Raíces de un número complejo

Consideremos un número entero positivo $n \geq 2$ y un número complejo $z_0 \neq 0$, como en el campo de los reales $\mathbb{R}$ la ecuación

$$Z^n - z_0 = 0 \tag{1.1}$$

se utiliza para definir las raíces n-ésimas del número z_0. Por lo tanto, llamamos a cualquier solución Z de la ecuación $(1{,}1)$ una raíz enésima del número complejo z_0.

Teorema 1.2 (Raíz n-ésima)

Sea $z_0 = r(\cos t + i\,\text{sen}\, t)$ un número complejo con $r > 0$ y $t \in [0, 2\pi)$.
El número z_0 tiene n raíces n-ésimas, dadas por la fórmula

$$Z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{t+2\pi k}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{t+2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, ..., n-1$$

♡

Demostración Usamos la representación polar del número complejo Z con el argumento extendido

$$Z = \rho(\cos\ \phi + i\,\text{sen}\ \phi)$$

Por definición, tenemos que $Z^n = z_0$ o equivalentemente

$$\rho^n(\cos\ n\phi + i\,\text{sen}\ n\phi) = r(\cos t + i\,\text{sen}\, t)$$

De donde obtenemos $\rho^n = r$ y $n\phi = t + 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$; por lo que $\rho = \sqrt[n]{r}$ y $\phi_k = \dfrac{t}{n} + k\dfrac{2\pi}{n}$ para $k \in \mathbb{Z}$.
Hasta ahora, las raíces de la ecuación $(1{,}1)$ son

$$Z_k = \sqrt[n]{r}(\cos\phi_k + \text{sen}\,\phi_k) \quad para\ k \in \mathbb{Z}$$

Considere un entero k y sea $r \in \{0, 1, ..., n-1\}$ el residuo de k módulo n.
Entonces $k = nq + r$ para $k \in \mathbb{Z}$, y

$$\phi_k = \frac{t}{n} + (nq + r)\frac{2\pi}{n} = \frac{t}{n} + r\frac{2\pi}{n} + 2q\pi = \phi_r + 2q\phi$$

Está claro que $Z_k = Z_r$. Por eso

$$\{Z_k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{Z_0, Z_1, ..., Z_{n-1}\}$$

En otras palabras, hay exactamente n raíces n-ésimas distintas de z_0, como se afirma. ■

Ejemplo 1.4 Resuelva las siguientes ecuaciones:

1. $z^6 + 8 = 0$
2. $z^3 - 4 = 0$

En este caso

1. Para $z^6 = -8$, se tiene que $n = 6$, $r = 8$ y $\theta = \pi$ en la fórmula

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right)$$

es decir

$$z_k = \sqrt[6]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{6}\right)\right)$$

por lo que para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ se tiene

$$z_0 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$z_1 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = i\sqrt{2}$$

$$z_2 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$z_3 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$$

$$z_4 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = -i\sqrt{2}$$

$$z_5 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$$

2. Para $z^3 = 4$, se tiene que $n = 3$, $r = 4$ y $\theta = 0$ en la fórmula

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right)$$

es decir

$$z_k = \sqrt[3]{4}\left(\cos\left(0 + \frac{2\pi k}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(0 + \frac{2\pi k}{3}\right)\right)$$

por lo que para $k = 0, 1, 2$ se tiene

$$z_0 = \sqrt[3]{4}\left(\cos(0) + i\,\mathrm{sen}(0)\right) = \sqrt[3]{4}$$

$$z_1 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[3]{4}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_2 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[3]{4}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

¿Cuántas raíces n-ésimas tiene un número complejo? ¿Una para cada k? En realidad, veremos que son exactamente n. Notemos que

$$\frac{\theta_0 + 2\pi(k+n)}{n} = \frac{\theta_0 + 2\pi k}{n} + 2\pi$$

Como seno y coseno tienen periodo 2π, tenemos que $z_{k+n} = z_k$; así, $z_0, \ldots, z_{n?-1}$ son las únicas raíces n-ésimas posibles de w. Ahora, ¿son $z_0, \ldots, z_{n?-1}$ distintas entre sí? Supongamos que $j, k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ satisfacen $z_j = z_k$; entonces

$$\frac{\theta_0 + 2\pi j}{n} = \frac{\theta_0 + 2\pi k}{n}$$

módulo 2π. Por tanto existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $j - k = mn$. Como $|j - k| < n$ y $n \in \mathbb{N}$, debe ocurrir que $m = 0$ y por tanto $j = k$. Así, obtenemos n raíces n-ésimas distintas.

Ejemplo 1.5 Sea z un punto en la circunferencia unitaria $|z| = 1$ y fijemos un valor de n, digamos, n = 5. Entonces las raíces quintas de z son

$$z_k = \cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{5}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{5}\right)$$

con $k = 0, \ldots, 5$.

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Exprese $\cos(6\theta)$ y $\mathrm{sen}(6\theta)$ en términos de $\cos\ \theta$ y $\mathrm{sen}\ \theta$
2. Encuentre todos los valores de $(-1)^{\frac{1}{2}}$