Facultad de Ciencias UNAM

VARIABLE COMPLEJA

Notas del curso Variable Compleja 1

Unidad 4

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Ofelia Cepeda Camargo & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 4. Series

1.1 Teorema del residuo. Cálculo de residuos

Si una función compleja f tiene una singularidad aislada en un punto z_0, entonces f tiene una representación en **serie de Laurent**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

El término más importante de la serie de Laurent es el correspondiente a b_1; tan importante que merece una definición.

Definición 1.1 (Residuo)

*Sea f una función analítica en una vecindad de z_0. El **residuo** de f en z_0, denotado por $Res(f, z_0)$, es el coeficiente b_1 en la serie de Laurent de f en z_0.* ♣

¿Por qué es importante el residuo? Pensemos, a manera de ejemplo, que z_0 es la única singularidad de f y que γ es una circunferencia con centro en z_0, contenida en el dominio de f, recorrida una sola vez en sentido positivo, de modo que $n(\gamma, z_0) = 1$. Usando la serie de Laurent de f y las propiedades de convergencia uniforme, tenemos

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(w)\, dw &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_\gamma (w-z_0)^n dw + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_\gamma \frac{1}{(w-z_0)^n}\, dw \\ &= 2\pi i b_1 = 2\pi i Res(f, z_0)\end{aligned}$$

Así, el residuo de f nos da toda la información necesaria para calcular la integral de f.
Como en el caso del teorema de Cauchy, el teorema del residuo tiene varias versiones. Esencialmente, este resultado nos dice que podemos calcular la integral de una función f a lo largo de una curva simple cerrada como la suma de los residuos de la función en las singularidades que se encuentran en el interior de γ. Una formulación general tendrá que tomar en cuenta el número de vueltas que le da la curva a cada singularidad, así como el hecho de que la región donde está definida f sea simplemente conexa o no. Aquí enunciaremos sólo el caso más sencillo, pues sería el que usaremos en las aplicaciones.

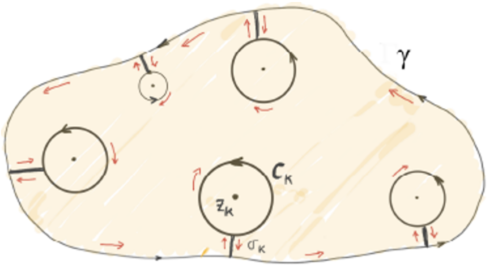
Teorema 1.1 (del Residuo)

Sea U una región simplemente conexa de $\mathbb{C}$ y $z_1, ..., z_n \in U$. Sea $f : U \setminus \{z_1, ..., z_n\} \to \mathbb{C}$ una función analítica y γ una curva simple, cerrada, C^1 por partes, orientada positivamente, contenida en U y que contiene en su interior a los puntos z_k. Entonces

$$\int_\gamma f(w)\, dw = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k)$$

♡

Demostración *Idea de la demostración*. Para cada uno de los puntos $z_1, ..., z_n$ podemos elegir una pequeñaa circunferencia C_k con centro en z_k, orientada positivamente, que no interseque a las demás y que esté contenida en U



En realidad sólo hay que ver que la integral de f sobre γ es la suma de las integrales sobre las C_k, pues entonces,

$$\int_{\gamma} f(w)\, dw = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(w)\, dw = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k)$$

Para mostrar la primera igualdad, construimos curvas σ_k que unan γ con cada C_k, ajenas a las demás circunferencias y ajenas entre sí. Vemos que

$$\widetilde{\gamma} = \gamma - \sum_{k=1}^{n} C_k + \sum_{k=1}^{n} \sigma_k - \sum_{k=1}^{n} \sigma_k$$

es homóloga a cero en $U \setminus \{z_1, ..., z_n\}$: Tenemos dos casos:

- Si $w = z_m$ para alguna $m = 1, ..., n$, entonces $n(\gamma, w) = 1$ y $n(C_k, w) = n(C_k, z_m) = \delta_{km}$, de modo que

$$n(\widetilde{\gamma}, w) = n(\gamma, w) - \sum n(C_k, w) = 0$$

- Si $w \notin U$, entonces w está en el exterior de γ, y por tanto $n(\gamma, w) = n\left(\sum C_k, w\right) = 0$ para toda $k = 1, ..., m$ de donde se sigue de nuevo que $n(\widetilde{\gamma}, w) = 0$.
  Por tanto, $\widetilde{\gamma}$ es homóloga a cero en $U \setminus \{z_1, ..., z_n\}$ y la integral de f a lo largo de $\widetilde{\gamma}$ es cero, lo que a su vez implica que la integral de f sobre γ es la suma de las integrales sobre las C_k

■

Una de las aplicaciones del teorema del residuo será al cálculo de integrales, siempre y cuando podamos calcular de manera sencilla los residuos de una función.

Ejemplo 1.1 consideremos la función

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$$

Entonces f tiene singularidades en $z = 0$ y $z = 1$. La serie de Laurent de f en el anillo $0 < |z| < 1$ está dada por

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = \frac{1}{z} + \sum_{m=0}^{\infty} z^m$$

de modo que $Res(f(z), 0) = 1$. ■

Comentario En el anillo $1 < |z| < \infty$,

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^m$$

!El término correspondiente a $\frac{1}{z}$ en esta serie tiene coeficiente cero! Este ejemplo muestra que para calcular el residuo $Res(f, z_0)$ por medio de la serie de Laurent, tenemos que considerar la serie en un anillo $0 < |z-z_0| < r$.

Supongamos que la función f tiene una sola singularidad en z_0, y además, que ésta no es una singularidad esencial. Consideremos primero el caso en que z_0 es un polo simple; así, el desarrollo en serie de Laurent cerca de z_0 tiene la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \frac{b_1}{z-z_0}$$

y entonces es claro que

$$Res(f, z_0) = b_1 = \lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0)$$

Ejemplo 1.2 Tenemos que

$$Res\left(\frac{e^z}{z}, 0\right) = \lim_{z \to 0} \frac{e^z}{z} z = 1 \quad y \quad Res\left(\frac{z}{z^2+1}, i\right) = \lim_{z \to i} \frac{z}{z^2+1}(z - i) = \frac{1}{2}$$

■

Veamos un ejemplo de cálculo de integrales.

Ejemplo 1.3 Calcularemos la integral real

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{a + \cos\ \theta} \quad a > 1$$

Dado que el coseno es una función par, la integral en cuestión se puede calcular como la mitad de la integral en el intervalo $[0, 2\pi]$. Para transformar esta integral en una integral compleja, consideremos $z = e^{i\theta} = \cos\ \theta + i\,\text{sen} + \theta$. Recordemos que si $|z| = 1$,

$$\frac{1}{z} = \overline{z} = \cos\ \theta - i\,\text{sen}\ \theta$$

de modo que

$$\cos\ \theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

Así, podemos escribir la integral en cuestión como

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{a + \cos\ \theta} = \frac{1}{2}\int_{|z|=1} \frac{1}{a + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{iz} = -i\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1}$$

Ahora calcularemos la última integral usando el teorema del residuo. Observemos que el denominador se puede factorizar como

$$z^2 + 2az + 1 = (z - z_1)(z - z_2), \quad z_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$$

Tenemos que

$$Res\left(\frac{1}{z^2 + 2az + 1}, z_1\right) = \lim_{z \to z_1} \frac{1}{z^2 + 2az + 1}(z - z_1) = \frac{1}{z_1 - z_2} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}}$$

por tanto,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{d\theta}{a + \cos\ \theta} &= -i\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} \\ &= (-i)2\pi Res\left(\frac{dz}{z^2 + 2az + 1}, z_1\right) \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}\end{aligned}$$

■

Comentario En el ejemplo anterior, las singularidades de la función eran polos simples.

Ahora bien, si z_0 es un polo de orden 2 de f. La serie de Laurent es

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2}$$

Observemos que la función $f(z)(z - z_0)^2$ tiene la forma

$$f(z)(z - z_0)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n+2} + b_1(z - z_0) + b_2$$

de modo que

$$b_1 = \lim_{z\to z_0} \frac{d}{dz}\left(f(z)(z-z_0)^2\right)$$

Ejemplo 1.4 Consideremos la función

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)^2}, \quad a > 0$$

la que podemos escribir como

$$f(z) = \frac{1}{(z-ai)^2(z+ai)^2}$$

Es claro que la función tiene polos de orden 2 en $\pm ai$. Entonces tenemos que

$$Res\left(\frac{1}{(z^2+a^2)^2}, \pm ai\right) = \lim_{z\to\pm ai} \frac{d}{dz}\left(f(z)(z\pm ai)^2\right) = \pm\frac{1}{4a^3 i}$$

■

En el caso general, si z_0 es un polo de orden k de f, la serie de Laurent es

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{k} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

y $f(z)(z-z_0)^k$ tiene la forma

$$f(z)(z-z_0)^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n+k} + b_1(z-z_0)^{k-1} + \sum_{n=2}^{k} b_n(z-z_0)^{k-n}$$

de modo que obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.1

Sea z_0 un polo de orden k de f. Entonces

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left(f(z)(z-z-0)^k\right)$$

♠

Consideremos el caso particular en que la función f sea el cociente de dos funciones analíticas, $f = \frac{g}{h}$. Puesto que queremos analizar los polos de orden finito de esta función, supondremos que z_0 es un cero de orden m de h, esto implica que existe una función analítica h_m que satisface

$$h(z) = (z-z_0)^m h_m(z), \quad h_m(z_0) = \frac{h^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0$$

En cuanto a la función g del numerador de f, puede pasar que z_0 sea un cero de g, de orden menor, igual o mayor que m. Debe ser más o menos claro para el lector que si z_0 es un cero de g de orden mayor o igual a m, entonces el cociente en realidad será una función analítica, de modo que podemos suponer que dicho orden es estrictamente menor que m; si lo denotamos por k, tenemos que

$$g(z) = (z-z_0)^k g_k(z), \quad g_k(z_0) = \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0$$

El cociente cumple entonces que

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{(z-z_0)^k g_k(z)}{(z-z_0)^m h_m(z)}$$

Observemos que $\frac{g_k}{h_m}$ es el cociente de dos funciones analíticas y que el denominador no se anula en z_0. Esto implica que el cociente se puede escribir en términos de una serie de Taylor alrededor de z_0 y así tenemos que

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{(z-z_0)^k}{(z-z_0)^m}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^{n+k-m}$$

es la expresión de f como una serie de Laurent en z_0. El residuo de f en z_0 es el coeficiente c_n tal que $n+k-m=-1$, o $n=m-k-1$.

Analicemos algunos casos particulares de esta situación. Supongamos primero que $g(z_0) \neq 0$, de modo que z_0 es un cero de orden 0 de g y que $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$, de modo que z_0 es un cero de orden 1 de h. Así, hacemos $k=0$ (es decir, $g_0 = g$) y $m=1$ en la igualdad anterior para obtener

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^{n-1} = \frac{c_0}{z-z_0} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-z_0)^{n-1}$$

de modo que el residuo es justamente c_0, el valor de $\dfrac{g_0}{h_1}$ en $z=z_0$:

$$Res(f,z_0) = c_0 = \frac{g_0(z_0)}{h_1(z_0)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \quad ■$$

Ejemplo 1.5 En algunas aplicaciones usaremos las funciones

$$\pi \cot\ \pi z = \frac{\pi \cos\ \pi z}{\text{sen}\ \pi z}, \qquad \pi \csc\ \pi z = \frac{\pi}{\text{sen}\ \pi z} \quad ■$$

Comentario Todos los enteros $k \in \mathbb{Z}$ cumplen las condiciones de la situación anterior; es decir, en tales puntos no se anula el numerador, mientras que son ceros de orden 1 del denominador. Podemos concluir entonces que

$$Res(\pi \cot\ \pi z, k) = \frac{\pi \cos\ k\pi}{\pi \cos\ k\pi} = 1 \quad y \quad Res(\pi \csc\ \pi z, k) = \frac{\pi}{\pi \cos\ k\pi} = (-1)^k$$

Por lo que si f es una función analítica en $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} Res(f(z)\cdot \pi \cot\ \pi z, k) &= f(k), \\ Res(f(z)\cdot \pi \csc\ \pi z, k) &= (-1)^k f(k) \end{aligned} \tag{1.1}$$

expresiones que usaremos para calcular series del tipo $\sum f(k)\ \ y\ \ \sum (-1)^k f(k)$.

Una idea similar a la anterior funciona cuando z_0 es a la vez un cero de orden k de g y un cero de orden $m = k+1$ de h. Ahora $\frac{g_k}{h_{k+1}}$ es analítica y si su serie de Taylor es $\sum c_n(z-z_0)^n$, entonces la serie de Laurent de f tiene la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^{n-1} = \frac{c_0}{z-z_0} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-z_0)^{n-1}$$

la única diferencia es que ahora

$$Res(f,z_0) = c_0 = \frac{g_k(z_0)}{h_{k+1}(z_0)} = \frac{\frac{g^{(k)}(z_0)}{k!}}{\frac{h^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}} = (k+1)\frac{g^{(k)}(z_0)}{h^{(k+1)}(z_0)}$$

Ejemplo 1.6 Analicemos la función $\dfrac{z}{1-\cos\ z}$. El origen 0 es un cero de orden 1 de $g(z) = z$ y un cero de orden 2 de $h(z) = 1 - \cos\ z$. Entonces

$$Res\left(\frac{z}{1-\cos\ z}, 0\right) = 2\,\frac{g'(0)}{h''(0)} = 2$$

y como aplicación, por el teorema del residuo,

$$\int_{|z|=1} \frac{w}{1-\cos\ w}\,dw = 2\pi i Res\left(\frac{z}{1-\cos\ z}, 0\right) = 4\pi i$$

■