Facultad de Ciencias UNAM

VARIABLE COMPLEJA

Notas del curso Variable Compleja 1

Unidad 2

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Ofelia Cepeda Camargo & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 3. Integración Compleja

1.1 Susesiones de funciones

Se trabajará las funciones analíticas desde el punto de vista de las series. En ciertos tratamientos de la teoría de funciones complejas, una función f es llamada analítica si, localmente, se representa como una serie de potencias.

1.2 Convergencia puntual de sucesiones de funciones

Definición 1.1 (convergencia puntual)

Una sucesión de funciones $f_n : A \to \mathbb{C}$ ***converge puntualmente*** *a una función $f : A \to \mathbb{C}$, si para cada $z \in A$, $f_n(z) \to f(z)$, es decir, si para cada $z \in A$ y cada $\epsilon > 0$, existe N tal que $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ siempre que $n \geq N$.* ♣

Ejemplo 1.1 La sucesión de funciones $f_n(z) = \left(\dfrac{n+1}{n}\right) z$ converge puntualmente a $f(z) = z$. ■

Ejemplo 1.2 La sucesión de funciones $f_n(z) = z^n$ converge puntualmente a la función $f(z) = 0$ para $z < 1$ ■

1.3 Convergencia uniforme de sucesiones de funciones

Definición 1.2 (Convergencia Uniforme)

Sea $\{f_n : A \to \mathbb{C}\}$ una una sucesión de funciones definidas en un conjunto A. Decimos que la sucesión ***converge uniformemente*** *a una función $f : A \to \mathbb{C}$ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{R}$ tal que que si $n \geq N$, $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$$

para todo $z \in A$ ♣

Ejemplo 1.3 La sucesión de funciones $f_n(z) = \left(\dfrac{n+1}{n}\right) z$ no converge uniformemente en $\mathbb{C}$ (ya que $|f_n(z) - f(z)| \to \infty$ cuando $z \to \infty$). ■

Ejemplo 1.4 La sucesión de funciones $f_n(z) = z^n$ converge uniformemente en cada disco $|z| \leq r$ con $r < 1$. ■

Comentario Una primera consecuencia de la convergencia uniforme: Si una sucesión de funciones continuas converge uniformemente a una función f, entonces f es continua. La convergencia uniforme también se comporta bien con las operaciones de integración y derivación.

✍ **Ejercicio 1.1** Muestre que la sucesión de funciones $f_n(x) = \cos\left(\dfrac{x}{n}\right)$.

- Converge uniformemente a la función constante $f(x) = 1$ para $x \in [0, \pi]$
- Converge puntualmente a 1 en todo $\mathbb{R}$

Solución *Tenemos que*

- *Observe que*

$$|1 - f_n(x)| = \left|1 - \cos\left(\frac{x}{n}\right)\right| = 1 - \cos\left(\frac{x}{n}\right) \leq \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{n}\right)^2$$

Para verificar la desigualdad, se considera la función

$$g(x) = \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{n}\right)^2 - 1 - \cos\left(\frac{x}{n}\right)$$

luego al calcular la derivada se obtiene que

$$g'(x) = \frac{x}{n^2} - \frac{1}{n}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{n}\right)$$

la cual es siempre positiva ya que $x \geq \operatorname{sen}(x)$ *para* $x \in [0, \pi]$*, es decir, g es una función creciente, por lo que se tiene la desigualdad considerada.*

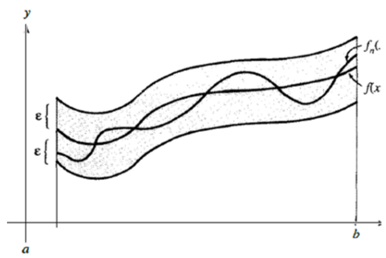
Por lo tanto, para $x \in [0, \pi]$*, se tiene*

$$|1 - f_n(x)| \leq \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2$$

- *Como* $\frac{x}{n} \to 0$ *cuando* $n \to \infty$*, y* $\cos(x)$ *es una función continua, se tiene que* $\cos\left(\frac{x}{n}\right) \to \cos(0) = 1$ *cuando* $n \to \infty$ *para toda* $x \in \mathbb{R}$. ■

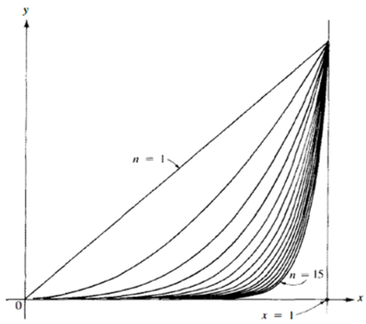
Comentario La convergencia uniforme implica a la convergencia puntual. La diferencia entre convergencia uniforme y puntual es la siguiente. Para la convergencia puntual, dada $\epsilon > 0$, a la N requerida se le permite variar de punto a punto, mientras que para la convergencia uniforme, debemos poder encontrar una sola N que funcione para toda z.

Es difícil dibujar la gráfica de una función con valores complejos de variable compleja, ya que requeriríamos cuatro dimensiones reales, pero las correspondientes nociones para funciones de valores reales son instructivas para ejemplificar. El significado geométrico de la convergencia uniforme se muestra en la figura



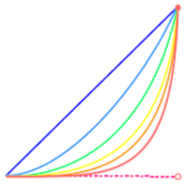
Si $\epsilon > 0$, entonces para n suficientemente grande, la gráfica $y = f_n(x)$ debe permanecer dentro de una $\epsilon - franja$ alrededor de la gráfica de f.

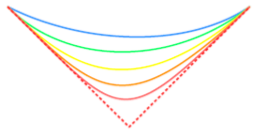
La sucesión de funciones $f_n(x) = x^n$ converge puntualmente a la función $f(x) = 0$.



Para $x \in [0, 1)$, pero la convergencia no es uniforme.

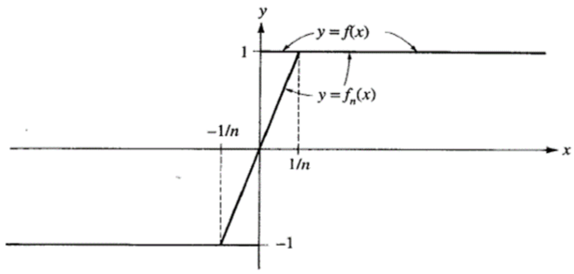
Comentario Una sucesión de funciones continuas puede converger puntualmente a una función que no es continua. Una sucesión de funciones diferenciables reales puede converger uniformemente a una función que no es diferenciable:





Ejemplo 1.5 Considere la función

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x \leq -\frac{1}{n} \\ nx, & \text{si } -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ 1, & \text{si} \frac{1}{n} \leq x. \end{cases}$$



como se ve en la figura las funciones f_n convergen puntualmente a f en toda la línea, pero la convergencia no es uniforme en cualquier intervalo que contenga al 0, ya que para valores de x distintos de 0 u muy pequeños, n tendría que ser muy grande para llevar a $f_n(x)$ dentro de una distancia específica de $f(x)$. Cada una de las funciones f_n es continua, pero la función limite no lo es. ■

Teorema 1.1 (Criterio de Cauchy para convergencia uniforme)

1. *Una sucesión $f_n(z)$ converge uniformemente en A si, para cualquier $\epsilon > 0$, existe una N tal que $n \geq N$ implica que $|f_n(z) - f_{n+p}(z)| < \epsilon$ para toda $z \in A$ y toda $p = 1, 2, 3, ...$*
2. *Una serie $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ converge uniformemente en A si, para toda $\epsilon > 0$, existe una N tal que $n \geq N$ implica que*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(z) \right| < \epsilon$$

para toda $z \in A$ y toda $p = 1, 2, ...$ ♡

Demostración

1. Para ($\Rightarrow$) supongamos que $f_n \to f$ uniformemente en A, entonces sea $\epsilon > 0$ y N tal que $n \geq N$ implica que $|f_n(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2}$ para toda z. Como $n+p \geq N$ se cumple que $|f_{n+p}(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2}$, así tenemos que

$$|f_n(z) - f_{n+p}(z)| \leq |f_n(z) - f(z)| + |f(z) - f_{n+p}(z)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

($\Leftarrow$) Para z fija podemos observar que $f_n(z)$ es una sucesión de Cauchy, entonces tenemos que $lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$. Hay que ver que $f_n \to f$ uniformemente en A. Sean $\epsilon > 0$ y N tal que $|f_n(z) - f_{n+p}(z)| < \frac{\epsilon}{2}$, con $n \geq N$ y $p \geq 1$. Para $z \in A$, tomemos una p lo suficientemente grande tal que $|f_{n+p}(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2}$, esto es posible por la convergencia puntual, así tenemos lo siguiente:

$$|f_n(z) - f(z)| \leq |f_n(z) - f_{n+p}(z)| + |f_{n+p}(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Así tenemos que $f_n(z)$ converge uniformemente

2. Para $(\Rightarrow)$ supongamos que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ converge uniformemente, es decir, $s_n(z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} g_k(z) \to s(z)$ uniformemente en A. Sea $\epsilon > 0$ y N tal que $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} g_k(z) - s(z)\right| < \frac{\epsilon}{2}$, como $n+p \geq N$, $p \geq 1$, tenemos que $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n+p} g_k(z) - s(z)\right| < \frac{\epsilon}{2}$, de esto tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(z)\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(z) - \sum_{k=1}^{n} g_k(z) + \sum_{k=1}^{n} g_k(z) - s(z) + s(z)\right| \\
&\leq \left|\sum_{k=1}^{n+p} g_k(z) - s(z)\right| + \left|s(z) - \sum_{k=1}^{n} g_k(z)\right| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ Aplicando el primer inciso a las sumas parciales. ■

Proposición 1.1

Si la sucesión f_n consiste de funciones continuas definidas en A y $f_n \to f$ uniformemente en A, entonces f es continua en A. De manera análoga, si las funciones $g_k(z)$ son continuas y $g(z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ converge uniformemente en A, entonces g es continua en A. ♠

Demostración Queremos mostrar que para $z_0 \in A$, y $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$, entonces $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. Sabemos que $f_n \to f$ uniformemente en A, entonces tomemos $\epsilon > 0$ y N tal que $|f_N(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{3}$, $\forall\, z \in A$, en particular para $z_0 \in A$. Como f_N es continua, tenemos que existe una $\delta > 0$ tal que $|f_N(z) - f_N(z_0)| < \frac{\epsilon}{3}$. Así tenemos lo siguiente:

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(z_0)| + |f_N(z) - f(z_0)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

Para la serie $g(z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ se aplica lo anterior a cada suma parcial. ■

1.4 Criterio M de Weierstrass

Este criterio es una de las herramientas más practicas para mostrar que una serie converge uniformemente.

Teorema 1.2 (Criterio M de Weierstrass)

Sea g_n una sucesión de funciones definidas en $A \subset \mathbb{C}$. Supongamos que existe una sucesión de contantes reales $M_n \geq 0$ tal que se cumplen las siguientes condiciones:

1. $|g_n(z)| \leq M_n$ *para toda* $z \in A$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ *converge*

Entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ *converge absoluta y uniformemente en A.* ♡

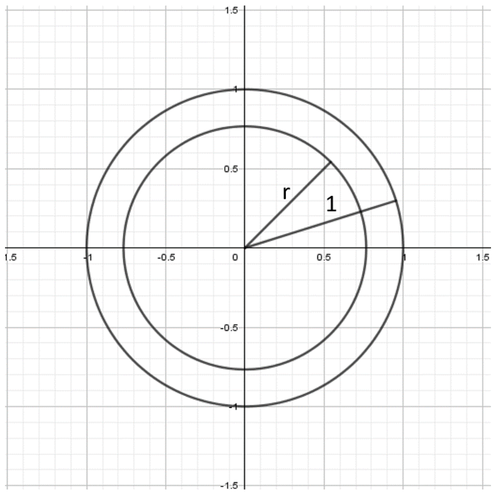
Demostración Tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, es decir, para toda $\epsilon > 0$ existe una N tal que si $n \geq N$, entonces $\sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \epsilon$, para toda $p \geq 1$. Así, para $n \geq N$ tenemos que:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |g_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \epsilon$$

Así, por el criterio de Cauchy tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge absoluta y uniformemente. ■

Ejemplo 1.6 Considere la serie $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. Probaremos que esta serie converge uniformemente en los conjuntos

$$A_r = \{z \mid |z| \leq r,\ 0 \leq r < 1\}$$



Solución

- ***Convergencia uniforme***. *Aquí* $g_n(z) = \frac{z^n}{n}$ *y* $|g_n(z)| = \frac{|z|^n}{n} \leq \frac{r^n}{n}$ *ya que* $|z| \leq r$. *Por lo tanto, hacemos* $M_n = \frac{r^n}{n}$. *Pero* $\frac{r^n}{n} \leq r^n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ *converge para* $0 \leq r < 1$. *Así,* $\sum M_n$ *converge y, por el criterio M de Weierstrass, la serie dada converge uniformemente*
- ***Convergencia puntual***. *Ésta converge puntualmente en* $A = \{z \mid |z| < 1\}$, *ya que cada* $z \in A$ *está en alguna* A_r, *para r suficientemente cerca de 1.*
- ***La serie no converge uniformemente en A***. *En efecto, si lo hiciera,* $\sum \frac{x^n}{n}$ *convergería uniformemente en* $[0, 1)$. *Suponga que esto fuera cierto, entonces para cualquier* $\epsilon > 0$ *existiría una N tal que* $n \geq N$ *implicaría que*

$$\frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots + \frac{x^{n+p}}{n+p} < \epsilon$$

para toda $x \in [0, 1)$ *y* $p = 0, 1, 2, \cdots$ *Pero la serie de tipo armónico*

$$\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \cdots$$

diverge a infinito (esto es, las sumas parciales $\to \infty$*) y, por tanto, podemos escoger p tal que*

$$\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{N+p} > 2\epsilon$$

Enseguida, escogemos x tan cerca de 1 tal que $x^{N+p} > \frac{1}{2}$. *Entonces*

$$\frac{x^N}{N} + \cdots + \frac{x^{N+p}}{N+p} > x^{N+p}\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{N+p}\right) > \epsilon$$

lo cual es una contradicción. Sin embargo, nótese que $g(z)$ *es, no obstante, continua en A pues es continua en cada z, ya que cada z está en alguna* A_r, *en la cual tenemos convergencia uniforme.*

■

Proposición 1.2

Sean U *una región de* $\mathbb{C}$, $\gamma : [a,b] \to U$ *una curva* C^1 *por partes y* $\{f_n : U \to \mathbb{C}\}$ *una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente a* $f : U \to \mathbb{C}$ *en U. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz$$

♠

Demostración Como cada f_n es continua y la convergencia es uniforme, f tambi én es continua y tiene sentido integrarla a lo largo de γ. Dada $\epsilon > 0$, sabemos que existe N tal que si $n \geq N$ se cumple la condición para todo $z \in U$. Entonces, para $n \geq N$,

$$\left|\int_\gamma f_n(z)\, dz - \int_\gamma f(z)\, dz\right| \leq \int_\gamma |f_n(z) - f(z)|\, |dz| < \epsilon \cdot long(\gamma)$$

■

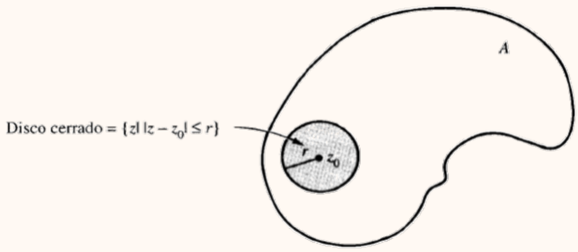
Comentario Lo anterior también se puede escribir como

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\, dz = \int_\gamma \lim_{n\to\infty} f_n(z)\, dz$$

de manera informal, podemos decir que bajo la convergencia uniforme podemos intercambiar el límite con la integral.

Teorema 1.3 (Teorema de la convergencia analítica)

1. *Sea A un conjunto abierto en* $\mathbb{C}$ *y sea* f_n *una sucesión de funciones analíticas definidas en A. Si* $f_n \to f$ *uniformemente en cada disco cerrado contenido en A, entonces f es analítica. Es más,* $f_n' \to f'$ *puntualmente en A y uniformemente en cada disco cerrado en A.*



2. *Si* g_k *es una sucesión de funciones analíticas definidas en un conjunto abierto A en* $mathbbC$, *y* $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ *converge uniformemente en todo disco cerrado en A, entonces g es analítica y* $g'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k'(z)$ *converge puntualmente en A y uniformemente en cada disco cerrado contenido en A.*

♡

Demostración Es suficiente con demostrar (1).

- Primero mostraremos que f es analítica:

Sea $z_0 \in A$ y sea $\{z \mid |z - z_0| \leq r\}$ un disco cerrado completamente en A (esto se puede ya que A es un conjunto abierto). Consideremos

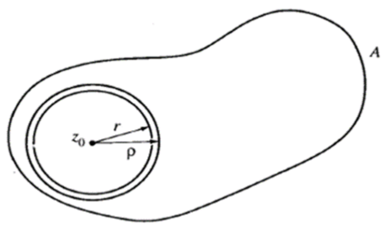
$$D(z_0, r) = \{z \mid |z - z_0| < r\}$$

el cual es una región simplemente conexa, también podemos observar que es conexa. Como $f_n \to f$ uniformemente en $D(z_0, r)$ tenemos que f es continua en $D(z_0, r)$. Tomemos una curva cerrada γ en $D(z_0, r)$, entonces como f_n es analítica en A, por teorema de Cauchy y el hecho de que γ es simplemente conexa, tenemos que $\displaystyle\int_\gamma f_n = 0$. Tenemos entonces que $\displaystyle\int_\gamma f_n \to \int_\gamma f$, por lo tanto $\displaystyle\int_\gamma f = 0$. Así, por el teorema de Morera, tenemos que f es analítica en $D(z_0, r)$.

- Ahora se mostrará que $f_n' \to f'$ uniformemente en cada disco cerrado en A. Sea

$$B = \{z \mid |z - z_0| \leq r\}$$

un disco cerrado en A. Tomemos un circulo γ de radio $\rho > r$ centrado en z_0; el cual contiene a B en su interior.



Entonces, sea $z \in B$, por la fórmula integral de Cauchy para integrales tenemos:

$$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta \quad y \quad f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta$$

Por hipótesis tenemos que $f_n \to f$ uniformemente en el disco cerrado $\{z \mid |z - z_0| \leq \rho\}$, el cual está completamente contenido en A. Entonces, dado $\epsilon > 0$ y N tal que $n \geq N$ implica que $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$, para toda z en el disco. Como γ es la frontera del disco, $n > N$ implica que

$$|f_n'(z) - f'(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta\right|$$

como $\zeta \in \gamma$ y $z \in B$, tenemos que $|\zeta - z| \geq \rho - r$. Por lo tanto, $n \geq N$ implica que

$$f_n'(z) - f'(z) \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\epsilon}{(\rho - r)^2} \cdot \ell(\gamma) = \frac{\epsilon\rho}{(\rho - r)^2}$$

Así, como ρ y r son constantes fijas e independientes de $z \in B$, tenemos que $f_n' \to f'$ uniformemente en todo disco cerrado de A.

■

Ejemplo 1.7 La función $F(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ es analítica para $|z| < 1$. Su derivada es $F'(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nz^{n-1}$. ■

Comentario Tenemos que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ para $|z| < 1$ asi que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$ para $|z| < 1$.

Ejemplo 1.8 La función $E(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ es analítica en $\mathbb{C}$.

$$E'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = E(z).$$ ■