VARIABLE COMPLEJA

Notas del curso Variable Compleja 1

Unidad 4

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Ofelia Cepeda Camargo & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 4. Series

1.1 Teorema de Taylor y Series de potencias

Trataremos de demostrar que una función f es analítica si y sólo si f se puede expresar localmente como una **serie de potencias**, llamada **serie de Taylor**, la cual es de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

Comentario Esta propiedad es otra instancia donde el cálculo real es distinto del complejo.

Ejemplo 1.1 La función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

es de clase C^∞ real y $f^k(0) = 0, \forall\, k \in \mathbb{N}$; sin embargo, f no es identicamente 0 cerca de 0, por lo que f no tiene una expansión en series de Taylor alrededor de origen.■

Definición 1.1 (Serie de potencias)

Una serie de potencias compleja es una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, *donde* $z_0 \in \mathbb{C}$ *y* $a_n \in \mathbb{C}\ \forall\, n$ ♣

La serie define una función en todos los puntos $z \in \mathbb{C}$ donde converge, y la convergencia depende basicamente del módulo de los coeficientes a_n y de la distancia de z a z_0.

Ejemplo 1.2 Tenemos que

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

para $|z| < 1$ y por lo tanto

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1-(1-z)} = 1 + (1-z) + (1-z)^2 + (1-z)^3 + \cdots + (1-z)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$$

para $|z - 1| < 1$. ■

1.2 Convergencia de series de potencias

Lema 1.1 (Lema de Abel-Weierstrass)

Suponga que $r_0 \geq 0$ *y que* $|a_n| \cdot r_0^n \leq M$ *pra toda n, donde M es alguna constante. Entonces, para* $r < r_0$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *converge uniformemente y absolutamente en el disco cerrado* $A_r = \{z \mid |z - z_0| \leq r\}$ ♡

Demostración Si $z \in A_r$, se tiene entonces

$$|a_n(z - z_0)^n| \leq |a_n| \cdot r^n = |a_n| \cdot r_0^n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \leq M \left(\frac{r}{r_0}\right)^n$$

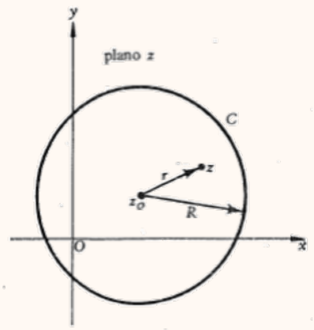
Así, tomemos

$$M_n = \left(\frac{r}{r_0}\right)^n$$

como $r < r_0$ esto implica que $\dfrac{r}{r_0} < 1$, con lo cual podemos ver que $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge. Así por el criterio M de Weiertrass tenemos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge uniforme y absolutamente en A_r. ■

Teorema 1.1 (Convergencia de series de potencias)

*Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ una serie de potencias. Existe un único número $R \geq 0$, posiblemente $+\infty$, llamado **radio de convergencia**, tal que si $|z-z_0| < R$, entonces la serie converge y si $|z-z_0| > R$, la serie diverge. Más aun, la convergencia es uniforme y absoluta en cada disco cerrado en $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < R\}$. Si $|z-z_0| = R$, no se sabe nada acerca de la convergencia. Al circulo $|z-z_0| = R$, se le llama **circulo de convergencia**, de la serie de potencias*



♡

Demostración Sea $R = \sup\left\{ r \geq 0 \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot r^n \textit{ converge} \right\}$. ahora, sea $r_0 < R$, por la definición de R tenemos que existe r_1, con $r_0 < r_1 \leq R$, tal que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot r_1^n$ converge. Por lo tanto, tenemos que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot r_0^n$ converge. Los términos $|a_n| \cdot r_0^n$ están acotados, de hecho tienden a 0. Así, por el lema 0.1 tenemos que la serie converge uniforme y absolutamente en A_r, para toda $r < r_0$. Como, para toda z, con $|z-z_0| < R$, cae en algún A_r y dado que siempre podemos elegir un r_0 tal que $r < r_0 < R$, tenemos la convergencia en z.

Ahora supongamos que $|z-z_0| > R$ y que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge, de esto queremos llegar a una contradicción. Tenemos que los términos $|a_n(z-z_0)^n|$ están acotados, ya que estos se aproximan a cero. Por el lema 0.1 tenemos que, si $R < r < |z_1 - z_0|$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n$ converge absolutamente si $z_1 \in A_r$. Por lo tanto $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ converge, pero esto implica, por la definición de R, que $R < R$, lo cual es una contradicción.

Así, hemos demostrado que la convergencia es uniforme y absoluta en cada disco cerrado A_r, estrictamente menor, y por lo tanto en cualquier disco cerrado en A. ■

✍ **Ejercicio 1.1** Dada la serie geométrica

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

1. La serie es uniformemente convergente dentro de y sobre toda la circunferencia $|z| < r < 1$
2. La serie no es uniformemente convergente dentro de la circunferencia $|z| = 1$

Solución *Tenemos que*

1. *La enésima suma parcial S_n y la suma S de la serie geométrica $1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$ son $\dfrac{1-z^n}{1-z}$ y*

$\dfrac{1}{1-z}$, *siempre que* $0 < |z| < 1$. *Por tanto*

$$|S_n - S| = \left|\frac{1-z^n}{1-z} - \frac{1}{1-z}\right| = \left|\frac{z^n}{1-z}\right|$$

Entonces, para $|z| \leq r < 1$

$$\left|\frac{z^n}{1-z}\right| \leq \frac{r^n}{1-r}$$

Si ϵ *es cualquier número positivo arbitrariamente pequeño, se encuentra un valor de* n *para el cual* $\dfrac{r^n}{1-r} < \epsilon$. *Si* $\dfrac{r^n}{1-r} < \epsilon$, *entonces* $n \log\, r < \log[\epsilon(1-r)]$. *Por consiguiente,*

$$n > \frac{\log[\epsilon(1-r)]}{\log\, r}$$

Como $r < 1$, $\log\, r$ *es negativo y el sentido de la desigualdad se invierte al dividir por* $\log\, r$. *Entonces, si* N *es el menor entero positivo mayor que* $\dfrac{\log[\epsilon(1-r)]}{\log\, r}$,

$$\left|\frac{z^n}{1-z}\right| < \epsilon$$

para todo $n > N$ *y todo* z *que satisface* $|z| \leq r < 1$. *En consecuencia, la serie* $1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$ *converge uniformemente para todo* z *dentro de y sobre la circunferencia* $|z| = r < 1$

2. *Sea* z *un punto dentro de la circunferencia* $|z| = 1$. *De la parte* (1), $|S_n - S| = \left|\dfrac{z^n}{1-z}\right|$. *Sea* $\epsilon > 0$ *dado y supongamos que existe un entero positivo* N *tal que* $\left|\dfrac{z^n}{1-z}\right| < \epsilon$ *para todo* $n > N$ *y todo* z *que satisface* $|z| < 1$. *Entonces, como* $N + 1 > N$, $\left|\dfrac{z^{N+1}}{1-z}\right| < \epsilon$, *para todo* z *que satisface* $|z| < 1$. *Si* $z_0 = 1 - \dfrac{1}{N+1+\epsilon}$ *de modo que* $|z_0| < 1$ *entonces*

$$\left|\frac{z_0^{N+1}}{1-z_0}\right| = \frac{\left[1 - \frac{1}{N+1+\epsilon}\right]^{N+1}}{\frac{1}{N+1+\epsilon}} > \frac{1 - \frac{N+1}{N+1+\epsilon}}{\frac{1}{N+1+\epsilon}} = \epsilon$$

Esta contradicción demuestra que $1 + z + z^2 + \cdots$ *no es uniformemente convergente para* $|z| < 1$. ■

Combinando los teoremas de convergencia analítica y convergencia de series de potencias se puede deducir el siguiente teorema.

Teorema 1.2 (Analiticidad de series de potencias)

Una serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *es una función analítica en el interior de su circulo de convergencia.*

♡

Demostración Basta ver que las funciones $a_n(z-z_0)^n$ son enteras, por lo que el resultado se tiene por el teorema de Weierstrass. ■

Proposición 1.1 (Criterios de la razón y de la raíz)

Sea $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *una serie de potencias.*

1. (**Criterio del cociente**). *El radio de convergencia R es igual a*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

si este límite existe

2. (**Criterio de la raíz**). *El radio de convergencia R es igual a*

$$\left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$$

si el límite existe.

Demostración Hemos visto que el radio de convergencia está dado por

$$R=\sup\left\{r\geq 0\;\middle|\;\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\cdot r^n<\infty\right\}$$

1. Para probar (1) escribimos $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ y consideramos primero el caso $0<L<\infty$. Aplicamos el criterio de la razón real a la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|\cdot r^n$. Si $0<r<L$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|\cdot r^{n+1}}{|a_n|\cdot r^n}=\frac{r}{L}<1$$

y por lo tanto la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|\cdot r^n$ converge. En cambio, si $L<r$, dicho límite es mayor a 1 y la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|\cdot r^n$ diverge. Para el caso $L=\infty$ se tiene que $\forall\, r$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|\cdot r^{n+1}}{|a_n|\cdot r^n}=\frac{r}{L}=0$$

y la serie converge en todo el plano. En contraste, si $L=0$ para cualquier valor r, el límite en la expresión anterior es ∞. Por lo tanto, R, el radio de convergencia es L en todos los casos.

2. Para probar (ii) consideramos primero el caso $\rho\in(0,\infty)$. Se tiene que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|\cdot r^n$ converge o diverge, conforme a que

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}r$$

sea menor o mayor que 1, respectivamente. Como $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$, esto equivale a decir que $\rho\cdot r$ sea menor o mayor a 1, esto es, $r<\dfrac{1}{\rho}$, o $r>\dfrac{1}{\rho}$, por lo que $\dfrac{1}{\rho}$ es el radio de convergencia, si $\rho=0$, el límite anterior es $0\;\forall\, r$ y $R=\infty$. En cambio, si $\rho=\infty$, dicho límite es $\infty\;\forall\, r$ y $R=0$. ■

Ejemplo 1.3 Para hallar el radio de convergencia de la serie

$$1+2iz-4z^2-8iz^3+16z^4+32iz^5-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(2i)^n z^n$$

hay que hallar los valores de r para los que $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|2i|^n r^n$ converge. Por el criterio de la razón, esta serie converge si

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}r^{n+1}}{2^n r^n}=2r<1$$

y diverge si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}r^{n+1}}{2^n r^n} = 2r > 1$$

así que el radio de convergencia es $\frac{1}{2}$. ■

Teorema 1.3 (Diferenciación de series de potencias)

Sea

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

una función analítica definida dentro de su circulo de convergencia de la serie de potencias dada. Entonces,

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

y esta serie tiene el mismo circulo de convergencia que $f(z)$. Es más, los coeficientes a_n están dados por $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ ♡

Demostración Sabemos, por el teorema de convergencia analítica, que la derivada

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

converge en $A = D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$. Para mostrar que $f'(z)$ tiene el mismo circulo de convergencia que $f(z)$ debemos mostrar que diverge para $|z - z_0| > R$. Si convergiera para algún punto z_1 con $|z_1 - z_0| = r_0 > R$, entonces $n a_n r_0^{n-1}$ debería estar acotado. Por lo que $a_n r_0^n = (n a_n r_0^{n-1}) \left(\frac{r_0}{n}\right)$ también debe ser acotado, así $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ debe converger para $R \leq |z - z_0| < r_0$, por el teorema de Abel-Weierstrass, pero esto contradice la propiedad máxima de R del teorema de convergencia de series de potencias. Por lo tanto, $f'(z)$ tiene el mismo radio de convergencia de $f(z)$.

Para obtener los coeficientes, tomemos $z = z_0$, en la fórmula que define $f(z)$, para encontrar $f(z_0) = a_0$, procediendo de manera inductiva se tiene que

$$f^{(n)}(z) = n! a_n + \sum_{K=n+1}^{\infty} k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)(z - z_0)^{k-n}$$

así tomando $z = z_0$ tenemos que $f^{(n)}(z_0) = n! a_n$. ■

Ejemplo 1.4 Demostrar mediante derivación de la serie geométrica, que

$$\frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + n z^{n-1} \cdots$$

para $|z| < 1$.

Solución *Sabemos de la serie geométrica que*

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \\ &= 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^k + \cdots \end{aligned}$$

para $|z| < 1$.

Derivando tenemos la serie

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-z)^2} &= 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + kz^{k-1} + \cdots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1}\end{aligned}$$

la cual tiene el mismo radio de convergencia que la serie geométrica, es decir, converge para $|z| < 1$. ■

Teorema 1.4 (Unicidad de las series de potencias)

Las expansiones de series de potencias alrededor del mismo centro es única. Si

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$$

para toda z *en algún disco* $D(z_0, r)$*, no trivial, con* $r > 0$*, entonces* $a_n = b_n$ *para* $n = 0, 1, 2, \cdots$ ♡

Demostración Esto sale directamente de la última afirmación del teorema anterior, pues tenemos que $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = b_n$. ■