VARIABLE COMPLEJA

Notas del curso Variable Compleja 1

Unidad 4

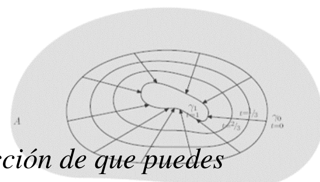
Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Ofelia Cepeda Camargo & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1



La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 4. Series

1.1 Clasificación de singularidades

Supongamos que una función f está definida y es analítica en una vecindad de un punto z_0, pero posiblemente no esté definida en dicho punto. En este caso decimos que z_0 es una **singularidad aislada** de f. Más formalmente, consideremos un conjunto abierto $U \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in U$ y $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ una función analítica. En una vecindad de z_0 la función f se puede representar mediante una serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

Podemos considerar tres posibilidades para los coeficientes b_n de esta serie:

1. $b_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ya hemos hablado antes de este caso, pues z_0 resulta ser una **singularidad removible**.
2. Existe $k \geq 1$ tal que $b_k \neq 0$ y $b_n = 0$ para todo $n > k$. En este caso, diremos que z_0 es un polo de orden k de f. Si $k = 1$, decimos que z_0 es un **polo simple**.
3. Existe una sucesión n_k tal que $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = \infty$ y $b - n_k \neq 0$ para todo k. Aquí decimos que z_0 es una **singularidad esencial**.

A continuación veremos ejemplos de cálculo de series de Laurent.

Ejemplo 1.1 Consideremos la función

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{z - 2} - \frac{1}{z - 1}$$

Es claro que $z = 1$ y $z = 2$ son singularidades de f. Calcularemos la serie de Laurent de f en distintos dominios.

- Consideremos primero el anillo $0 < |z - 1| < 1$, usando una serie geométrica en la forma

  $$\frac{1}{z - 2} = \frac{1}{1 - (z - 1)} = -\sum_{n=0}^{\infty}(z - 1)^n$$

  de modo que

  $$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = -\frac{1}{z - 1} - \sum_{n=0}^{\infty}(z - 1)^n, \quad 0 < |z - 1| < 1$$

  esto muestra que $z = 1$ es un polo de orden 1 de f; más adelante se daran criterios más eficientes para determinar la naturaleza de cada singularidad.
- En el anillo $0 < |z - 2| < 1$ podemos aplicar un método similar al anterior.
  Como

  $$\frac{1}{z - 1} = -\frac{1}{1 - (z - 2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(2 - z)^n$$

  entonces

  $$f(z) = \frac{1}{z - 2} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(z - 2)^n, \quad 0 < |z - 2| < 1$$

  de modo que, de nuevo, $z = 2$ es un polo de orden 1 de f.
- Veamos qué ocurre en el anillo $1 < |z| < 2$.
  Puesto que $1\frac{1}{z - 2}$ es analítica en el disco $|z| < 2$, es igual a su serie de Taylor en $z = 0$, la que podemos

obtener fácilmente usando de nuevo la serie geométrica:

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

En cuanto a $\frac{1}{z-1}$, sabemos que esta función es analítica en la región $|z| > 1$, de modo que aquí conviene usar una serie geométrica en términos de $\frac{1}{z}$:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$$

reuniendo la información, tenemos

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}, \quad 1 < |z| < 2$$

Comentario En esta región la serie de Laurent tiene una infinidad de términos con potencias tanto positivas como negativas. ■

Ejemplo 1.2 La función $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ tiene una singularidad en $z_0 = 0$. De hecho, ésta es una **singularidad esencial**, pues la serie de Laurent de f en 0 es

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}$$

■

Ejemplo 1.3 Analizaremos la función

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$$

alrededor de $z_0 = -2$. Usando fracciones parciales, podemos escribir a f como

$$f(z) = \frac{2}{z+2} - \frac{1}{z+1}$$

Observemos que

$$\frac{1}{z+1} = -\frac{1}{1-(z+2)} = -\sum_{n=0}^{\infty}(z+2)^n$$

siempre que $|z+2| < 1$. Así, la serie de Laurent de f(z) está dada por

$$f(z) = \frac{2}{z+2} + \sum_{n=0}^{\infty}(z+2)^n$$

siempre que $|z+2| < 1$. Notemos que $b_n = 0$ para todo $n \geq 2$, es decir $z_0 = -2$ es un **polo simple**. ■

Ejemplo 1.4 Calcularemos la serie de Laurent en $z_0 = -2$ de la función

$$f(z) = (z-3)\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{z+2}\right)$$

Sabemos que la serie de Taylor en 0 de la función seno está dada por

$$\mathrm{sen}(w) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{w^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

y escribiendo $(z-3) = (z+2) - 5$, tenemos

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-3)\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{z+2}\right) = (z+2)\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{z+2}\right) - 5\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{z+2}\right) \\ &= (z+2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z+2)^{2n+1}} - 5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z+2)^{2n+1}} \end{aligned}$$

Expresaremos esto como una sola suma. Escribimos $(-1)^n = \cos(n\pi)$ y, para la primera suma, hacemos $m = 2n$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(2n+1)!(z+2)^{2n}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos\left(m\frac{\pi}{2}\right)}{(m+1)!(z+2)^m}$$

mientras que para la segunda suma hacemos $m = 2n+1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5\cos(n\pi)}{(2n+1)!(z+2)^{2n+1}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{5\cos\left((m+1)\frac{\pi}{2}\right)}{m!(z+2)^m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{5(m+1)\operatorname{sen}\left(m\frac{\pi}{2}\right)}{(m+1)!(z+2)^m}$$

Así, la serie de Laurent de f(z) está dada por

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos\left((m)\frac{\pi}{2}\right) + 5(m+1)\operatorname{sen}\left((m)\frac{\pi}{2}\right)}{(m+1)!(z+2)^m}$$

Como $b_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $z_0 = -2$ es una **singularidad esencial**. ■

Ejemplo 1.5 Ahora encontraremos la serie de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{(2-z)^2}$$

en los anillos $1 < |z| < 2$ y $|z| > 2$. Notemos que

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{(2-z)^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2-z}\right)$$

por lo que primero calcularemos la serie de $\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2-z}$ y luego derivaremos.

Consideremos primero el anillo $1 < |z| < 2$. Como $|z| > 1$, $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$. Por otro lado, $|z| < 2$, de manera que $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$; así, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2-z} &= -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} \\
&= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

Derivando tenemos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{z^{n+2}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}z^{n-1}$$

cambiando los índices en ambas sumas tenemos que la serie de Laurent de f en el anillo $1 < |z| < 2$ es

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{m-1}{z^m} + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{m+1}{2^{m+2}}z^m$$

Por otro lado, en el anillo $|z| > 2$, tenemos $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$ y por consiguiente $\left|\frac{1}{z}\right| < \frac{1}{2} < 1$. Escribimos

$$\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+1}{z^{n+1}}$$

Derivando, obtenemos que la serie de Laurent de f(z) en el anillo $|z| > 2$ está dada por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(2^n+1)}{z^{n+2}} = \sum_{m=2}^{\infty}\frac{(m-1)(2^{m-2}+1)}{z^m}$$

■