Variable Compleja

Notas del curso Variable Compleja 1

Unidad 4

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Ofelia Cepeda Camargo & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 4. Series

1.1 Teorema de Taylor

Lema 1.1 (Taylor)

Sea A una región de $\mathbb{C}$ y $f: A \to \mathbb{C}$ analítica. Entonces para $z_0 \in A$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z0)^n + f_k(z - z_0)^k, \quad \textit{donde} \;\; f_k(z_0) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

♡

Demostración Haremos la demostración por inducción sobre k.

- Para $k = 1$ queremos mostrar que

$$f(z) = f(z_0) + f_1(z)(z - z_0)$$

con $f_1(z)$ analítica. La expresión anterior sugiere definir

$$f_1(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}, & \text{si } \; z \neq z_0 \\ f'(z_0), & \text{si } z = z_0. \end{cases}$$

Como $\lim_{z\to z_0} f_1(z)(z - z_0) = 0$, la función f_1 tiene una singularidad removible en z_0, y por tanto es analítica. Esto muestra el caso $k = 1$.

- Ahora supongamos que

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \cdots + \frac{f^{(k-2)}(z_0)}{(k-2)!}(z - z_0)^{k-2} + f_{k-1}(z)(z - z_0)^{k-1}$$

donde f_{k-1} es analítica y

$$f_{k-1}(z_0) = \frac{f^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$$

- Aplicando el caso $k = 1$ a la función f_{k-1}, tenemos que

$$f_{k-1}(z) = f_{k-1}(z_0) + f_k(z)(z - z_0)$$

con f_k analítica. Sustituyendo en la expresión de arriba, tomando en cuenta el valor de $f_{k-1}(z_0)$, tenemos

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \cdots + \frac{f^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}(z - z_0)^{k-1} + f_k(z)(z - z_0)^k$$

derivando k veces y evaluando en z_0, tenemos que $f^{(k)}(z_0) = k! f_k(z_0)$, de donde

$$f_k(z_0) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

■

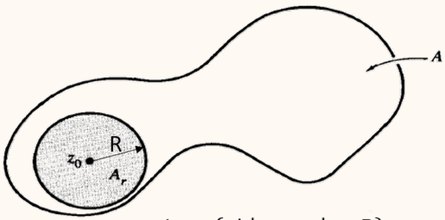
Comentario Es común utilizar la expresión una función analítica es igual a su serie de Taylor, pero debemos precisar un poco esta afirmación. Por un lado, una serie de potencias posee un radio de convergencia, mientras que la función analítica está definida en un abierto que puede ser muy diferente de un disco.

Teorema 1.1 (Teorema de Taylor)

Sea A una región de $\mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$ una función analítica en A y $z_0 \in A$. Entonces f tiene una *representación como una serie de potencias*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

en el máximo disco $D(z_0, R)$ contenido en la intersección de A con el disco de convergencia de la serie.



$A_r = \{z|\ |z - z_0| < R\}$

Los coeficientes están dados por

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw$$

donde γ es una circunferencia con centro z_0 contenida en $D(z_0, R)$. La convergencia de la serie es uniforme en cualquier disco derrado $\overline{D(z_0, r)} \subset D(z_0, R)$

Demostración Procedemos en primer término

- Mostrando la unicidad de la representación de f como una serie de potencias. Supongamos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

sustituimos w por z y dividimos entre $(w - z_0)^{k+1}$ para obtener

$$\frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w - z_0)^{n-k-1}$$

Por la convergencia uniforme, podemos integrar término a término con respecto de w. En la serie del lado derecho, la única integral que no se anula es aquella con potencia $(w - z_0)^{-1}$, es decir, cuando $n = k$;

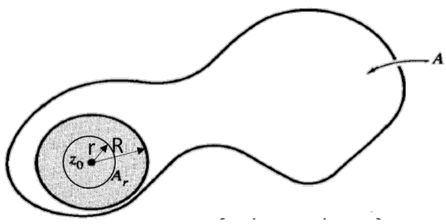
$$\int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}}\, dw = a_n \int_{\gamma} (w - z_0)^{-1} dw = 2\pi i a_n$$

de donde obtenemos nuestra afirmación.

- Ahora veamos que en efecto, f se puede representar como una serie de potencias. Por el lema 0.1 (Taylor), f se puede escribir como

$$f(z) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n + f_k(z)(z - z_0)^k \tag{1.1}$$

donde f_k es una función analítica.
Consideremos un disco cerrado $\overline{D(z_0, r)} \subset D(z_0, R)$



y γ una circunferencia con centro z_0 y radio $\rho \in (r, R)$. Aplicando la fórmula integral de Cauchy a f_k, tenemos

$$f_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_k(w)}{w-z}\,dw, \quad z \in \overline{D(z_0,r)}$$

usando la expresión $(1{,}1)$ para $f_k(w)$ dentro del signo de la integral, tenemos

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{1}{(w-z)(w-z_0)^k}\left(f(w) - \sum_{n=0}^{k-1}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(w-z_0)^n\right) dw \\ &= \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)(w-z_0)^k}\,dw \\ &- \left(\sum_{n=0}^{k-1}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\int_\gamma \frac{dw}{(w-z)(w-z_0)^{k-n}}\right)\end{aligned}$$

En el lema siguiente mostraremos que cada una de las integrales

$$\int_\gamma \frac{dw}{(w-z)(w-z_0)^{k-n}}, \quad n = 1, ..., k-1$$

se anula; suponiendo que esto ocurre, tenemos la siguiente expresión para $f_k(z)$:

$$f_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)(w-z_0)^k}\,dw \tag{1.2}$$

sustituyendo en $(1{,}1)$, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\left|f(z) - \sum_{n=0}^{k-1}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n\right| &= |f_k(z)(z-z_0)^k| \\ &= \left|\frac{(z-z_0)^k}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)(w-z_0)^k}\,dw\right|\end{aligned}$$

Ahora haremos estimaciones de la última expresión. Como f es continua en γ, existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \gamma$. Recordando que $z \in \overline{D(z_0,r)}$ y que w está en la circunferencia de radio ρ con centro en z_0, tenemos que $|z-z_0| \leq r$ y $|w-z_0| = \rho$. Por último, tenemos que la mínima distancia entre los puntos $z \in \overline{D(z_0,r)}$ y los puntos w de la curva γ es $\rho - r$. Reuniendo toda esta información, tenemos que

$$\left|f(z) - \sum_{n=0}^{k-1}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n\right| \leq \left(\frac{r}{\rho}\right)^k \frac{M\rho}{\rho - r}$$

para todo $z \in \overline{D(z_0,r)}$. Puesto que $r < \rho$, la expresión del lado derecho tiende a cero cuando $k \to \infty$. Esto nos dice que la sucesión de sumas parciales de la serie de Taylor converge uniformemente a $f(z)$ en cualquier disco cerrado $\overline{D(z_0,r)}$ con $r < R$. Esto implica que la serie converge a $f(z)$ en el disco $D(z_0,R)$. ■

Para concluir la demostración necesitamos el siguiente lema, en el que usaremos una notación ligeramente diferente.

Lema 1.2

Para cada $m \in \mathbb{N}$ definamos

$$F_m(z_0) = \int_\gamma \frac{dw}{(w-z)(w-z_0)^m}$$

entonces $F_m(z_0) = 0$ para cualquiera z, z_0 en el interior de γ. ♡

Demostración Habíamos mostrado que si φ una función continua en los puntos de γ y

$$F_m(z_0) = \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w - z_0)^m}\, dw$$

entonces f_m es analítica y $F'_m(z_0) = mF_{m+1}(z_0)$. En nuestro caso $\varphi(m) = \dfrac{1}{w - z}$, donde z se considera fijo. Usando inducción, basta verificar que $F_1(z_0) = 0$ para todo z_0

$$\begin{aligned} F_1(z_0) &= \int_\gamma \frac{dw}{(w-z)(w-z_0)} = \frac{2\pi i}{z - z_0}\left(\int_\gamma \frac{dw}{w-z} - \frac{dw}{w-z_0}\right) \\ &= \frac{1}{z - z_0}(n(\gamma, z), n(\gamma, z_0)) = 0 \end{aligned}$$

pues γ es una circunferencia que le da una vuelta a z y a z_0. ■

Ejemplo 1.1 Sea $f(z) = \dfrac{1}{z}$. Calcularemos la serie de Taylor de f en 0 y un $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ arbitrario. Sabemos que

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

Como la serie de Taylor es única, ésta debe ser la serie de Taylor de f. Su radio de convergencia es $R = 1$. Ahora, para $z_0 \neq 1$, queremos escribir

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

El truco consiste en usar de nuevo la expresión de la serie geométrica:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{z - z_0}\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{1-z_0}} = \frac{1}{1-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)^n$$

de modo que

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad donde \quad a_n = \frac{1}{(1-z_0)^{n+1}}$$

Usando el criterio del cociente, podemos ver que el radio de convergencia es $|1 - z_0|$, es decir, la distancia de z_0 a 1. ■

Ejemplo 1.2 Consideremos la función exponencial $f(z) = e^z$. Como su derivada es igual a ella misma, tenemos que en su desarrollo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ en serie de Taylor en z_0 los coeficientes son $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{1}{n!}$. Esta serie tiene que su radio de convergencia es ∞. ■

Ejemplo 1.3 Calcularemos la serie de Taylor de $f(z) = \log\ z$ en $z_0 \neq 0$. Como

$$f'(z) = \frac{1}{z}, \quad f''(z) = -\frac{1}{z^2}, \quad f'''(z) = \frac{2}{z^3}$$

y en general,

$$f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{z^n}$$

tenemos que la serie de Taylor de $\log\ z$ en z_0 es

$$\log\ z = \log\ z_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad donde \quad a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n z_0^n}$$

■

Comentario El radio de convergencia de la serie del lado derecho de esta ecuación es $R = |z_0|$ y que esta representación de $\log\ z$ es válida en el mayor disco $D(z_0, r)$ contenido en el dominio (rama) del logaritmo.

Como aplicación del teorema de Taylor, haremos un primer estudio de los ceros de una función analítica.

Definición 1.1

Sea A una región de $\mathbb{C}$, $z_0 \in A$ y $f : A \to \mathbb{C}$ analítica en A.

- *$z_0 \in A$ es un cero de orden k de f si y sólo si*

$$f(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \quad y \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0$$

- *$z_0 \in A$ es un cero de orden infinito de f si y sólo si $f^{(n)}(z_0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*

♣

Corolario 1.1 (del Teorema de Taylor)

Sea A una región de $\mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$ una función analítica en A y z_0 un cero de orden infinito. Entonces f es idénticamente nula en A.

♡

Demostración Si z_0 es un cero de orden infinito, por el Teorema 0.1 (Taylor) tenemos que $f \equiv 0$ en el máximo disco $D(z_0, R)$ contenido en A. Pero esto dice que el conjunto de ceros de orden infinito de f es un conjunto abierto. Por otro lado, su complemento es el conjunto de puntos z tales que alguna derivada $f^{(n)}(z)$ es distinta de cero; por continuidad, este conjunto también es abierto. Como A es conexo y el conjunto de ceros de orden infinito no es vacío (pues z_0 existe por hipótesis), tenemos que f es idénticamente cero en A. ■

Corolario 1.2

Sea A una región de $\mathbb{C}$, $f, g : A \to \mathbb{C}$ analíticas. Supongamos que existe $z_0 \in A$ tal que $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces $f \equiv g$ en A.

♡

Ahora mostraremos un lema que será de utilidad en varias ocasiones.

Lema 1.3

Sea A una región de $\mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$ analítica en A y $z_0 \in A$. Si z_0 es un cero de orden k, entonces existe una vecindad V de z_0 donde f se puede escribir como

$$f(z) = f_k(z)(z - z_0)^k$$

con $f_k : V \to \mathbb{C}$ analítica y $f_k(z_0) \neq 0$.

♡

Demostración Recordemos que f se puede escribir como

$$f(z) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + f_k(z)(z - z_0)^k, \quad f_k(z_0) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

Como

$$f(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$$

y $f^{(k)}(z_0) \neq 0$, entonces $f(z) = f_k(z)(z - z_0)^k$, con f_k analítica y $f_k(z_0) \neq 0$, como se pedía. ■

Proposición 1.1

Un cero de orden k de f es aislado; es decir, existe una vecindad V de z_0 tal que el único cero de f en V es precisamente z_0.

♠

Demostración Como $f_k(z_0) \neq 0$, por continuidad existe una vecindad V de z_0 donde $f_k(z) \neq 0$ y por tanto $f(z) \neq 0$. ■

Así, sólo tenemos las siguientes alternativas para los ceros de una función analítica f:

- Si z_0 es un cero de orden finito, entonces es un cero aislado.
- Si z_0 es un cero de orden infinito de f, entonces $f \equiv 0$, de modo que z_0 está rodeado de ceros.