Facultad de Ciencias UNAM

Variable Compleja

Notas del curso Variable Compleja 1

Unidad 2

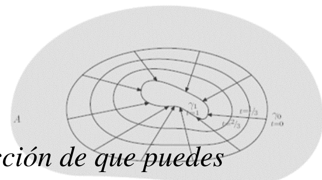
Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Ofelia Cepeda Camargo & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1



La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 3. Integración Compleja

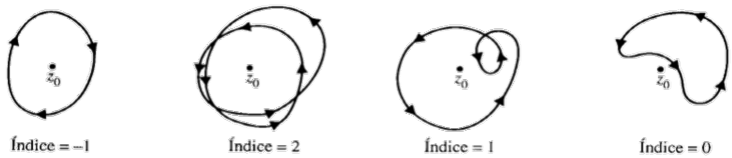
1.1 Índice de una curva

Definición 1.1 (Índice de una curva)

*Sean $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva cerrada C^1 por partes y $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $z_0 \notin \gamma$. Entonces el número de vueltas de γ con respecto de z_0 (también llamado el **índice** de γ con respecto de z_0) está definido como*

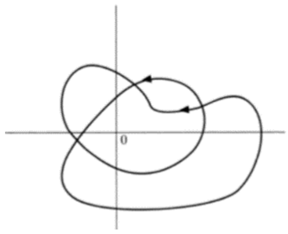
$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$

♣



Índice de una curva De manera intuitiva, el índice de una curva es el número de vueltas que la curva efetúa alrededor del punto (figura 1)

Figura 1.1: Curva de índice 2 con respecto al origen



Ejemplo la curva $\gamma(t) = z_0 + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi n]$, rodea n veces al punto z_0, y se tiene que

$$n(\gamma, z_0) = \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i n \quad o \quad n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i n} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = n$$

Teorema 1.1 (El índice de una curva es un número entero)

Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva cerrada C^1 por partes y z_0 un punto tal que $z_0 \notin \gamma$; entonces $n(\gamma, z_0)$ es un número entero.

♡

Demostración Sea

$$g(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}\, ds$$

entonces, en los puntos donde el integrando es continuo, el teorema fundamental del cálculo nos da

$$g'(t) = \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}$$

así,

$$(e^{-g(t)}(\gamma(t) - z_0))' = e^{-g(t)} \frac{-\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}(\gamma(t) - z_0) + e^{-g(t)}\gamma'(t) = 0$$

en los puntos donde $g'(t)$ existe, y por tanto $e^{-g(t)}(\gamma(t) - z_0)$ es constante por partes en $[a,b]$. Como la función es continua, entonces es globalmente constante en $[a, b]$, por lo que

$$e^{-g(a)}(\gamma(a) - z_0) = e^{-g(b)}(\gamma(b) - z_0)$$

como γ es cerrada, $\gamma(a) = \gamma(b)$. Esto implica que $e^{-g(a)} = e^{-g(b)}$. Además sabemos que $g(a) = 0$, de modo que $e^{-g(b)} = 1$ por lo que b tiene que ser un múltiplo entero de $2\pi i$, es decir

$$g(b) = \int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}\, ds = 2\pi k i$$

para alguna $k \in \mathbb{Z}$, de donde

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

■

Ejemplo 1.1 Sea $\gamma(t) = z + R\, e^{-it}$, $0 \leq t \leq 2k\pi$, la circunferencia de centro z y radio R recorrida k veces en sentido negativo. Por la definición de índice se tiene:

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{0}{2k\pi}\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2k\pi} \frac{-Rie^{-it}}{Re^{-it}}\, dt = -k$$

Por lo que la curva da k vueltas en sentido negativo alrededor del punto. ■

Teorema 1.2 (Fórmula integral de Cauchy)

Sea A una región, γ una curva cerrada C^1 por tramos contenida en A, $f : A \to \mathbb{C}$ una función analítica, $z_0 \in A \setminus \gamma$. Entonces

$$n(\gamma, z_0) f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

♡

Demostración Sea $z_0 \in A \setminus \gamma$ fija, se define

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & z \neq z_0 \\ f'(z_0) & z = z_0 \end{cases}$$

Se tiene que g es analítica en $A - \{z_0\}$ y continua en A, por lo que $\displaystyle\int_\gamma g = 0$.

Finalmente,

$$0 = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - \int_\gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0}\, dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - 2\pi i f(z_0) n(\gamma, z_0)$$

■

Ejemplo 1.2 Evalúe $\displaystyle\oint_\gamma \frac{e^z}{z - \pi i}\, dz; \quad |z| = 4$

Solución *En este caso*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4} \frac{e^z}{z - \pi i}\, dz = f(\pi i) = e^{\pi i}$$

por tanto

$$\oint_{|z|=4} \frac{e^z}{z - \pi i}\, dz = 2\pi i e^{\pi i} = -2\pi i$$

■

La aplicación más usual de la fórmula de Cauchy ocurre cuando $n(\gamma, z_0) = 1$. Bajo esta hipótesis, tenemos

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Ejemplo 1.3 Sea γ una circunferencia con centro z_0 y recorrida una sola vez, en sentido positivo; en forma explicícita, $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) dt$$

lo cual nos dice que $f(z_0)$ es una especie de promedio de los valores de f en una circunferencia con centro en z_0 y radio arbitrario (siempre que la circunferencia y su interior queden dentro del dominio de f). ■

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Evaluar la integral $\oint_\gamma \frac{e^{z^2}}{z - i}\, dz$. Para cualquier trayectoria cerrada que no pase por i.