Facultad de Ciencias
UNAM

VARIABLE COMPLEJA

Notas del curso Variable Compleja 1

Unidad 1

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Ofelia Cepeda Camargo & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 1. Introducción

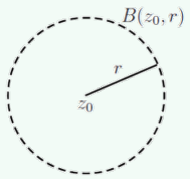
1.1 Topología en el plano complejo

1.2 Disco Abierto

Definición 1.1 (Disco abierto)

Un disco abierto con centro z_0 y radio $r > 0$ es el conjunto:

$$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$$



♣

Comentario Notemos que la circunferencia del disco, el conjunto

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$$

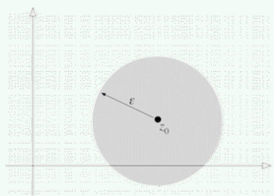
no esta incluida en el conjunto $B(z_0, r)$

1.3 Vecindad

Definición 1.2 (Vecindad o Entorno)

Una vecindad (o entorno) del punto $z_0 \in \mathbb{C}$ es un disco abierto de radio ϵ, centrado en z_0.

$$B(z_0, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \epsilon\}$$

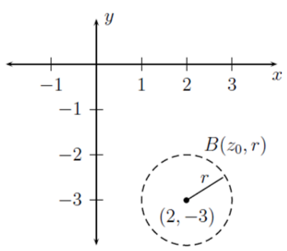


♣

Ejemplo 1.1 El conjunto $|z - 2 + 3i| < 0{,}02$ define una vecindad del punto $z_0 = 2 + 3i$ con radio $\epsilon = 0{,}02 > 0$.

Solución *Sea* $|z - 2 + 3i| < 0{,}02$*, entonces*

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2} < 0{,}02$$
$$(x-2)^2 + (y+3)^2 < (0{,}02)^2$$



Definición 1.3 (Vecindad Reducida o Disco Perforado)

Una vecindad (o entorno)reducido del punto $z_0 \in \mathbb{C}$ denotado por $B'(z_0, r)$ es el conjunto de puntos

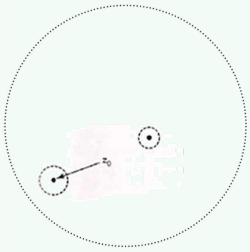
$$B'(z_0, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C} \bigm| 0 < |z - z_0| < \epsilon\}$$

es el conjunto de puntos z interiores al disco de centro z_0 y radio $\epsilon > 0$ salvo el propio z_0 ♣

1.4 Conjunto Abierto

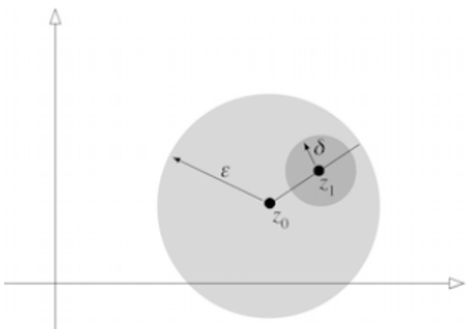
Definición 1.4 (Conjunto Abierto)

*Se dice que un subconjunto $S \subseteq \mathbb{C}$ es **abierto** si para cada $z_0 \in S$ hay un número real ϵ tal que $B(z_0, \epsilon) \subseteq S$. Enfatizamos que ϵ puede depender de z_0.*



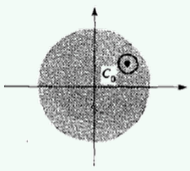
♣

Ejemplo 1.2 El disco $B(z_0, \epsilon)$ es abierto en sí mismo, porque si $z_1 \in B(z_0, \epsilon)$ entonces $|z_1 - z_0| < \epsilon$. Elija $\delta > 0$ tal que $\delta < \epsilon - |z_1 - z_0|$. Por la desigualdad del triángulo, $B(z_0, \delta) \subseteq B(z_0 \epsilon, z_0)$



Definición 1.5 (Punto interior)

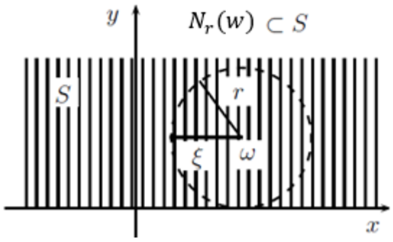
Dado un conjunto en $S \subset \mathbb{C}$, se dice que $z_0 \in S$ es un punto interior de S si alguna vecindad de z_0 está completamente contenida en S.



♣

Ejemplo 1.3 Sea $S = \{z \bigm| Im(z) > 0\}$ cada punto $w \in S$ es un punto interior.
En efecto:
Si $z = x + iy$ entonces $Im(z) = y > 0$. Sea $w \in S$, entonces podemos hallar un $r > 0$, con $0 < r < Im(w)$, tal que $B(w, r) \subseteq S$

Es decir, sea $\xi \in B(w,r)$; entonces $Im(\xi) = Im(w) + Im(\xi - w)$ pero $Im(w) + Im(\xi - w) \geq Im(w) - |\xi - w| > Im(w) - r > 0$. Luego: $Im(w - r) > 0$, entonces $Im(w) > r$, lo que implica $0 < r < Im(w)$



El conjunto de todos los puntos interiores de S se llama **interior de S** y se denota $int\ S$.

Comentario Un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ es abierto si para todo punto $\omega \in S$ existe algún $\epsilon > 0$, tal que $B(\omega, r) \subseteq S$. En otras palabras un conjunto S es un conjunto abierto si y solo si todos sus puntos son puntos interiores.

Ejemplo 1.4 El conjunto $\mathbb{C}$ es un conjunto abierto.

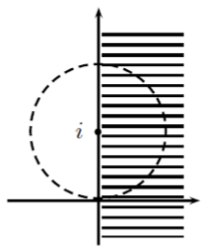
En efecto:

Sea $\omega \in \mathbb{C}$ entonces es posible hallar $\epsilon > 0$ (por más peque~no que sea), tal que $B(\omega, \epsilon) \subseteq \mathbb{C}$

Ejemplo 1.5 El conjunto $S = \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) \geq 0\}$ no es conjunto abierto.

En efecto:

Sea $\omega = i \in S$, pero es imposible hallar un $\epsilon > 0$ tal que $B(i, \epsilon) \subseteq S$. Esto es, el disco $B(i, \epsilon)$ contiene por ejemplo al punto $-\dfrac{r}{2} + i \notin S$.



Teorema 1.1 (Uniones e intersecciones de conjuntos abiertos)

(a) Sea $\{S_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una colección de conjuntos abiertos en $\mathbb{C}$, indexada por el conjunto I. Entonces la unión $\displaystyle\bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha$ es un conjunto abierto

(b) Sea $S_1, S_2, ..., S_n$ cualquier colección finita de conjuntos abiertos en $\mathbb{C}$. Entonces su intersección $S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n$ es abierto.

♡

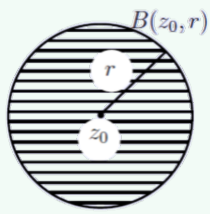
Demostración Es similar a la demostración en $\mathbb{R}^n$. ■

1.5 Conjuntos Cerrados

Definición 1.6 (Disco cerrado)

Un disco cerrado que se denota $\overline{B}$, con centro en z_0 y radio $r > 0$, es el conjunto

$$\overline{B}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$$



♣

Definición 1.7 (Complemento de un conjunto)

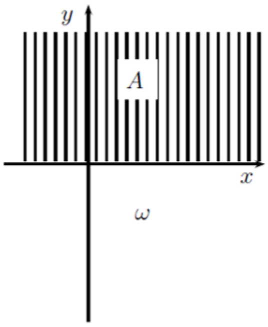
Dado un conjunto $S \subset \mathbb{C}$, el complemento de S es el conjunto $\mathbb{C} - S$ de todos los puntos que no están en S. Se suele denotar S^c. ♣

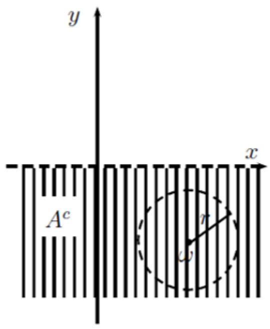
Definición 1.8 (Conjunto Cerrado)

*Se dice que un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ es **cerrado** si su **complemento** $\mathbb{C} \setminus S = S^c$ es un conjunto **abierto**.* ♣

Ejemplo 1.6 El conjunto vacio $\emptyset$ es cerrado, pues su complemento $\mathbb{C}$ es abierto.
De igual manera $\mathbb{C}$ es cerrado, pues su complemento $\emptyset$ es abierto.
Ejemplo 1.7 El conjunto $A = \{z \mid Im(z) \geq 0\}$ es cerrado.
Para ver esto sólo tenemos que probar que su complemento

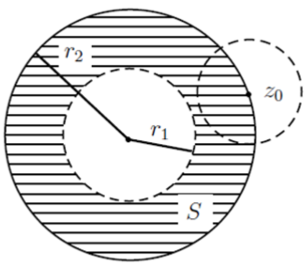
$$A^c = \{z \mid Im(z) < 0\} \text{ es abierto}$$





Sea $w \notin A$ entonces $w \in A^c$, teniendo en cuenta que $Im(w) < 0$, tomamos $r = \frac{1}{2}|Im(w)|$, vemos que $N_r(w) \subset A^c$ entonces A^c es abierto, entonces A es cerrado.
Comentario Es conveniente observar que es posible que un conjunto sea abierto y cerrado al mismo tiempo, como lo es en el caso del conjunto vacío $\emptyset$ y de todo el plano complejo $\mathbb{C}$. A su vez, un conjunto puede no ser ni abierto ni cerrado, como se demuestra a continuación
Ejemplo 1.8 Sea $0 < r_1 < r_2$ y sea $S = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z| < |r_2|\}$. S es un conjunto que no es ni abierto ni cerrado.

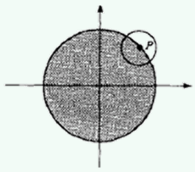
- S es un anillo circular
- Si $z_0 \in S$ no existe un $r > 0$, tal que $B(z_0, r) \subset S$



1.6 Frontera de un conjunto

Definición 1.9 (Puntos frontera de un conjunto)

Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ es un punto frontera de S si toda vecindad de z_0 contiene puntos que están en S y puntos que no lo están.



El conjunto de todos los ***puntos frontera*** *de S se llama* ***frontera de S*** *y se denota ∂S.* ♣

Comentario Un punto frontera no es ni punto interior ni un punto exterior.

Definición 1.10 (Caracterización de conjuntos cerrados)

Un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ es cerrado si contiene todos sus puntos frontera. Esto es $\partial S \subset S$. ♣

1.7 Clausura de un conjunto

Definición 1.11 (Clausura de un conjunto)

Sea $S \subset \mathbb{C}$, la clausura de S, que lo denotaremos como $\overline{S}$, es el conjunto

$$\overline{S} = S \cup \partial S$$

♣

Ejemplo 1.9 La clausura del disco abierto $B(\omega, r)$ es el disco abierto

$$\overline{B}(\omega, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \omega| \leq r\}$$

1.8 Punto de acumulación

Definición 1.12 (Punto de Acumulación)

Dado $S \subset \mathbb{C}$, un punto z se llama punto de acumulación de S (ó punto límite) si cualquier disco $B(z, r)$ contiene puntos de S diferentes de z. ♣

Comentario Se nota que el punto z puede o no pertenecer a S. Un resultado también importante es que un conjunto es cerrado si contiene todos sus puntos de acumulación.

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Sea el subconjunto siguiente:

$$\Omega = \{z = x + iy \,\Big|\, \forall\, x, y \in \mathbb{Q},\ |z| < 1\}$$

Se pide analizar

(a). ¿Es Ω cerrado?

(b). ¿Es Ω abierto?