VARIABLE COMPLEJA

Notas del curso Variable Compleja 1

Unidad 2

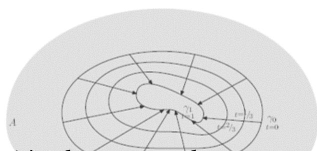
Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Ofelia Cepeda Camargo & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1



La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 3. Integración Compleja

1.1 Conceptos básicos

Ahora comenzaremos el tema de la integral de funciones de variable compleja. Comencemos con la siguiente defnición, que es más o menos natural.

Definición 1.1 (Funciones complejas)

Una función compleja $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de variable real t, se define

$$f(t) = u(t) + iv(t), \quad t \in [a, b] \tag{1.1}$$

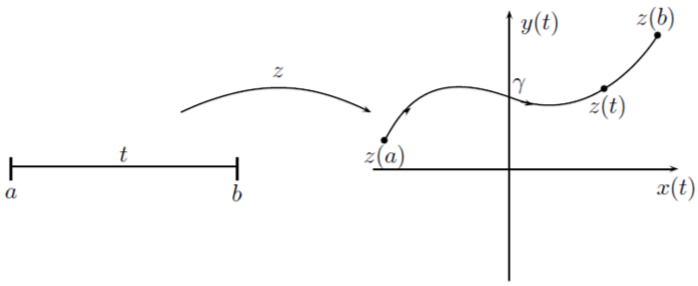
donde $u(t),\ v(t)$ son funciones de variable real continuas en [a,b] ♣

Comentario La ecuación $(1{,}1)$ tiene las características

- Se puede escribir como $z(t) = x(t) + iy(t)$
- Si $z(t) = (x(t), y(t))$, entonces la curva γ es el conjunto

$$\Big\{ z(t) = (x(t), y(t)) \;\Big|\; t \in [a, b] \Big\}$$

A este conjunto se le llama traza de γ, geométricamente se ve así



Definición 1.2 (Integral compleja)

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ una función continua, $f(t) = u(t) + iv(t)$, donde $u(t),\ v(t)$ son funciones reales. Entonces la integral de f en $[a, b]$ es el número complejo

$$\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b u(t)\ dt + i \int_a^b v(t)\ dt$$

♣

Propiedad *Son válidas las siguientes afirmaciones:*

(a) La integral es $\mathbb{C}$-lineal; es decir, para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ y $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ continuas se tiene

$$\int_a^b (\lambda\, f(t) + \mu\, g(t))dt = \lambda \int_a^b f(t) + \mu \int_a^b g(t)dt$$

(b) Para cada $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ continua se tiene

$$Re\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b Re(f(t))dt$$

y también

$$Im\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b Im(f(t))dt$$

(c) *Para cada* $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ *continua se tiene*

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

Demostración Tenemos que

1. Sean $\lambda = x_0 + iy_0$, $f(t) = u(t) + iv(t)$ y $\mu = x_1 + iy_1$, $g(t) = r(t) + is(t)$, entonces

$$\begin{aligned}\lambda\, f(t) + \mu\, g(t) &= (x_0 + iy_0)(u(t) + iv(t)) + (x_1 + iy_1)(r(t) + is(t)) \\ &= (x_0u(t) - y_0v(t)) + i(x_0v(t) - y_0u(t)) + (x_1r(t) - y_1s(t)) + i(x_1s(t) - y_1r(t))\end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}\int_a^b (\lambda\, f(t) + \mu\, g(t))dt &= \int_a^b (x_0u(t) - y_0v(t)) + i(x_0v(t) - y_0u(t)) + (x_1r(t) - y_1s(t)) + i(x_1s(t) - y_1r(t))dt \\ &= \int_a^b [(x_0u(t) - y_0v(t)) + (x_1r(t) - y_1s(t))] + i[(x_0v(t) - y_0u(t)) + (x_1s(t) - y_1r(t))]dt \\ &= \int_a^b [(x_0u(t) - y_0v(t)) + (x_1r(t) - y_1s(t))]dt \\ &+ i\int_a^b [(x_0v(t) - y_0u(t)) + (x_1s(t) - y_1r(t))]dt \\ &= x_0\int_a^b u(t)dt - y_0\int_a^b v(t)dt + i[x_1\int_a^b r(t)dt - y_1\int_a^b s(t)dt] \\ &+ ix_0\int_a^b v(t)dt - iy_0\int_a^b u(t) + ix_1\int_a^b s(t)dt - iy_0\int_a^b r(t)dt \\ &= (x_0 + iy_0)\int_a^b (u(t) + iv(t))dt + (x_1 + iy_1)\int_a^b (r(t) + is(t))dt \\ &= \lambda\int_a^b f(t)dt + \mu\int_a^b g(t)dt\end{aligned}$$

2. Tenemos que si $f(t) = u(t) + iv(t)$ entonces

$$\begin{aligned}Re\left(\int_a^b f(t)dt\right) &= Re\left(\int_a^b (u(t) + iv(t))dt\right) \\ &= Re\left(\int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt\right) \\ &= \int_a^b u(t)dt \\ &= \int_a^b Re(f(t))dt\end{aligned}$$

Tambiém

$$\begin{aligned}Im\left(\int_a^b f(t)dt\right) &= Im\left(\int_a^b (u(t) + iv(t))dt\right) \\ &= Im\left(\int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt\right) \\ &= \int_a^b v(t)dt \\ &= \int_a^b Im(f(t))dt\end{aligned}$$

3. Podemos escribir $\int_a^b f(t)dt = re^{i\theta}$. Entonces $e^{-i\theta}\int_a^b f(t)dt = r$ es real, de modo que

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)dt\right| &= Re\left(e^{-i\theta}\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b Re(e^{-i\theta}f(t))dt \\ &\leq \int_a^b |e^{-i\theta}f(t)|dt = \int_a^b |f(t)|dt\end{aligned}$$

■

Definición 1.3 (Curvas de clase C^1)

Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva continua. Se dice que γ es de clase C^1 por tramos, si existe una partición $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a,b]$, tal que $\forall\, i \in \{1, 2, ..., n\}$ se tiene $\gamma|(x_{i-1}, x_i)$ es diferenciable y la restricción de γ' al intervalo (x_{i-1}, x_i) tiene una extensión continua a $[x_{i-1}, x_i]$. ♣

Integraremos principalmente a lo largo de curvas que sean de clase C^1 por tramos.

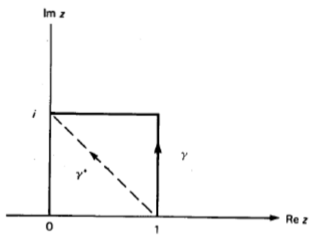
Definición 1.4

Sean $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $f : A \to \mathbb{C}$ una función continua en A y $\gamma : [a,b] \to A$ una curva de clase C^1 en $[a,b]$. La integral de f a lo largo de γ se define como

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt$$

♣

Ejemplo 1.1 Para evaluar $\int_\gamma x\, dz$ a lo largo del arco γ mostrado en la figura



parametrizamos γ por

$$\gamma(t) = \begin{cases} 1 + it & 0 \leq t \leq 1 \\ (2-t) + i & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Entonces

$$\gamma'(t) = \begin{cases} i & 0 \leq t \leq 1 \\ -1 & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Ahora al integrar sobre cada uno de los intervalos se obtiene

$$\int_\gamma \text{`}x\, dz = \int_0^1 i\, dt + \int_1^2 (2-t)(-1)\, dt = -\frac{1}{2} + i$$

ya que $x(t) = 1$ en $0 \leq t \leq 1$ y $x(t) = 2 - t$ en $1 \leq t \leq 2$

Al escoger una parametrización diferente para γ , por ejemplo

$$\gamma(t) = \begin{cases} 1 + i\log(t) & 1 \leq t \leq e \\ 2 - \frac{t}{e} + i & e \leq t \leq 2e \end{cases}$$

Entonces

$$\gamma'(t) = \begin{cases} \frac{i}{t} & 1 \leq t \leq e \\ \frac{-1}{e} & e \leq t \leq 2e \end{cases}$$

Ahora al integrar se obtiene

$$\int_\gamma x\,dz = \int_1^e \frac{i}{t}\,dt + \int_e^{2e}\left(2-\frac{t}{e}\right)\left(\frac{-1}{e}\right)\,dt = -\frac{1}{2}+i$$

Por lo tanto, la integral es independiente de las dos parametrizaciones de γ. ■

Ejemplo 1.2 Evaluar $\displaystyle\int_\gamma f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$ donde $f(z) = x - iy$ y $\gamma(t) = \cos(t) + i\operatorname{sen}(t)$ $t \in [0, 2\pi]$.

Solución *En este caso*

- $u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t) = \cos(t)(-sen(t)) - \cos(t)(-sen(t)) = 0$
- $u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t) = \cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t) = 1$

Por lo que

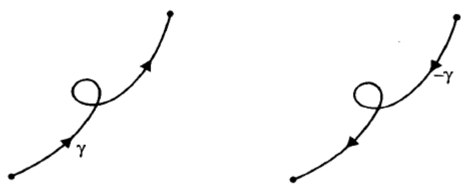
$$\int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i$$

■

Definición 1.5 (Curva opuesta)

Para una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, definimos la curva opuesta $-\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ como $(-\gamma)(t) = \gamma(a+b-t)$. ♣

Ésta es γ recorrida en el sentido opuesto



Proposición 1.1 (Integral de la curva opuesta)

Denotemos por $-\gamma$ la curva que tiene la misma imagen que γ, pero recorrida en sentido contrario. Entonces

$$\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz$$

♠

Demostración Podemos parametrizar $-\gamma : [-b, -a] \to U$, donde $-\gamma(t) = \gamma(-t)$. Entonces

$$\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_{-b}^{-a} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = -\int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)\,ds = -\int_\gamma f(z)\,dz$$

en la penúltima igualdad hemos usado el teorema de cambio de variable para la función $s(t) = -t$, e intercambiado los límites de la integral.

1.2 Cálculo integral

Proposición 1.2 (Propiedad de la integral)

Sean $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $f : U \to \mathbb{C}$ una función continua en U y $\gamma : [a, b] \to U$ una curva C^1 en $[a, b]$. Sean $g : U \to \mathbb{C}$ otra función continua en U y $\lambda,\ \mu \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\int_\gamma (\lambda f(z) + \mu g(z))dz = \lambda\int_\gamma f(z)dz + \mu\int_\gamma g(z)dz$$

♠

Demostración Tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_\gamma (\lambda f(z) + \mu g(z))dz &= \int_a^b (\lambda f + \mu g)(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
&= \int_a^b (\lambda f(\gamma(t)) + \mu g(\gamma(t)))\gamma'(t)dt \\
&= \int_a^b (\lambda f(\gamma(t))\gamma'(t) + \mu g(\gamma(t))\gamma'(t))dt \\
&= \int_a^b (\lambda f(\gamma(t))\gamma'(t) + \int_a^b \mu g(\gamma(t))\gamma'(t))dt \\
&= \lambda \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) + \mu \int_a^b g(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
&= \lambda \int_\gamma f(z)dz + \mu \int_\gamma g(z)dz
\end{aligned}$$

Proposición 1.3 (Propiedad de la integral)

Para una funcion continua f, y curvas γ_1 y γ_2 se tiene que

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$$

Demostración Sean $\gamma_1[a,b] \to \mathbb{C}$ y $\gamma_2[b,c] \to \mathbb{C}$, luego $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 : [a,c] \to \mathbb{C}$ está definida como $\gamma(t) = \gamma_1(t)$ si $t \in [a,b]$ y $\gamma(t) = \gamma_2(t)$ si $t \in [b,c]$. Luego,

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1+\gamma_2} f dz &= \int_a^c f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
&= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt + \int_c^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
&= \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.3 Evalúe $\int_\gamma \overline{z}^2 dz$ donde γ es la línea quebrada que une $(0,0)$ con (1,1) y luego une $(1,0)$ con $(1,1)$.

Solución *Sea $\gamma : [0,2] \to \mathbb{C}$ definida como $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, donde*

$$\gamma_1(t) = t; \quad 0 \le t \le 1, \qquad \gamma_2(t) = 1 + (t-1)i; \quad 1 \le t \le 2$$

Calculando la integral se obtiene

$$\begin{aligned}\int_\gamma \overline{z}^2 dz &= \int_{\gamma_1} \overline{z}^2 dz + \int_{\gamma_2} \overline{z}^2 dz \\ &= \int_0^1 t^2 dt + \int_1^2 [1-(t-1)^2 - 2i(t-1)] i dt \\ &= \int_0^1 t^2 dt + \int_1^2 [-t^2 + 2t - 2ti + 2i] i dt \\ &= \int_0^1 t^2 dt + \int_1^2 (-t^2 i + 2ti + 2t - 2) dt \\ &= \frac{t^3}{3}\bigg|_0^1 + \frac{-t^3 i}{3} + \frac{2t^2 i}{2} + \frac{2t^2}{2} - 2t\bigg|_1^2 \\ &= \frac{1}{3} + \left(\frac{-8i}{3} + 4i + 4 - 4\right) - \left(\frac{-i}{3} + i + 1 - 2\right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{4i}{3} + \frac{2i}{3} + 1 = \frac{4}{3} + 2i\end{aligned}$$

■

Proposición 1.4 (Propiedad de la integral)

Sean $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $f : U \to \mathbb{C}$ una función continua en U y $\gamma : [a,b] \to U$ una curva C^1 en $[a,b]$. Se tiene

$$\left|\int_\gamma f(z) dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)|\, |dz|$$

En particular, si $|f(z)| \leq M$, donde M es una constante, entonces

$$\left|\int_\gamma f(z) dz\right| \leq M \cdot long(\gamma)$$

♠

Demostración En este caso tenemos

$$\left|\int_\gamma f(z) dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))|\, |\gamma'(t)| dt = \int_\gamma |f(z)|\, |dz|$$

■

Proposición 1.5 (Propiedad de la integral)

Sean $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $f : U \to \mathbb{C}$ una función continua en U y $\gamma : [a,b] \to U$ una curva C^1 en $[a,b]$. Si existe una función analítica $F : U \to \mathbb{C}$ tal que $F'(z) = f(z)$, entonces

$$\int_\gamma f(z) dz = F(\gamma(t))\Big|_a^b = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

En particular, si γ es una curva cerrada, $\displaystyle\int_\gamma f(z) dz = 0$

♠

Demostración Usamos el teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt &= \int_a^b F(\gamma(t))\gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))\end{aligned}$$

■

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Sea C el arco del círculo $|z| = 2$ que está en el primer cuadrante. Muestre que
$$\left|\int_C \frac{dz}{z^2+1}\right| \leq \frac{\pi}{3}$$
2. Evalúe $\displaystyle\int_\gamma \overline{z}^2 dz$ donde γ es la línea recta que une $(0,0)$ con (1,1)