Variable Compleja

Notas del curso Variable Compleja 1

Unidad 1

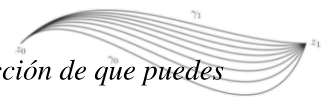
Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Ofelia Cepeda Camargo & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1



La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 1. Introducción

Introducción

- *Álgebra y geometría de complejos*
- *Forma polar. Potencias y raíces*
- *Lugares geométricos en $\mathbb{C}$*
- *La proyección estereográfica*
- *Topología, sucesiones y series*

1.1 Álgebra y geometría de las operaciones de números complejos

1.1.1 El conjunto de los números complejos

Definición 1.1 (*El conjunto de los números complejos*)

El conjunto de los números complejos, denotado por $\mathbb{C}$, consiste en todos los números de la forma $a+ib$, donde $a, b \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{C} = \{z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

♣

Es importante destacar que existe una correspondencia biunívoca del conjunto de números complejos $\mathbb{C}$ con los puntos del plano $\mathbb{R}^2$ mediante la asociación

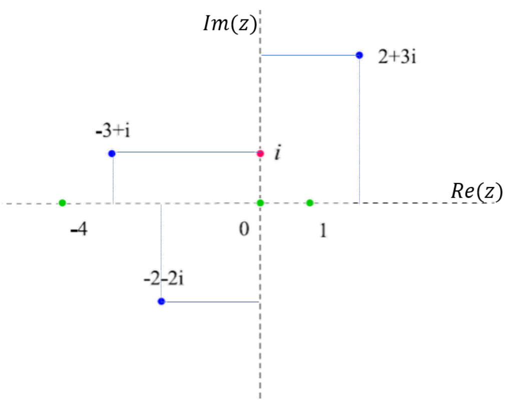
$$a + ib \mapsto (a, b)$$

Por ende se pueden identificar los números complejos con los puntos del plano. La parte real del número complejo $a + ib$ es el número real a, y la parte imaginária es el número real b. De esta manera, al eje X se le llamará eje real y al eje Y se le llamará eje imaginario. Si $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$ se escribirá

$$\boxed{\text{Re z=a}} \quad e \quad \boxed{\text{Im z=b}}$$

Ejemplo 1.1 Parte real y parte imaginaria de un número complejo

$$z = 2 + 3i \ \Rightarrow\ Re(z) = 2,\ Im(z) = 3$$
$$z = -3 + i \ \Rightarrow\ Re(z) = -3,\ Im(z) = 1$$
$$z = -2 - 2i \ \Rightarrow\ Re(z) = -2,\ Im(z) = -2$$



Comentario Mas adelante probaremos que dos números complejos son iguales si y sólo si tienen la misma parte real y la misma parte imaginaria.

1.1.2 Las operaciones de los números complejos

La adición y la multiplicación dan siempre resultados pertenecientes al sistema de los números complejos. De hecho, suponiendo que las reglas aritméticas ordinarias son de aplicación a los números complejos, obtenemos

- $(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$
- $(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+i(ad+bc)$

En la segunda identidad hemos hecho uso de la relación $i^2=-1$.

Ejemplo 1.2 $\boxed{\text{Suma y multiplicación de números complejos}}$

Si $z_1=2+3i$ y $z_2=5-2i$ entonces

$$z_1+z_2=(2+3i)+(5-2i)=(2+5)+(3-2)i=7+i$$

$$z_1\cdot z_2=(2+3i)\cdot(5-2i)=(2\cdot 5-3\cdot(-2))+(2\cdot(-2)+3\cdot 5)i=15+11i$$

Es menos obvio el hecho de que la $\boxed{\text{división}}$ sea también posible.

Ejemplo 1.3 Queremos probar que $\dfrac{a+ib}{c+id}$ es un número complejo, siempre y cuando $c+id\neq 0$.

Si se denota $\dfrac{a+ib}{c+id}=x+iy$ se tendrá

$$(a+ib)=(c+id)\cdot(x+iy)$$

de acuerdo a las operaciones

$$a+ib=(cx-dy)+i(dx+cy)$$

y obtenemos las dos ecuaciones

$$a=cx-dy$$

$$b=dx+cy$$

Este sistema de ecuaciones lineales posee la solución única

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}$$

$$y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

ya que, como sabemos, c^2+d^2 no es nulo. Tenemos así el resultado

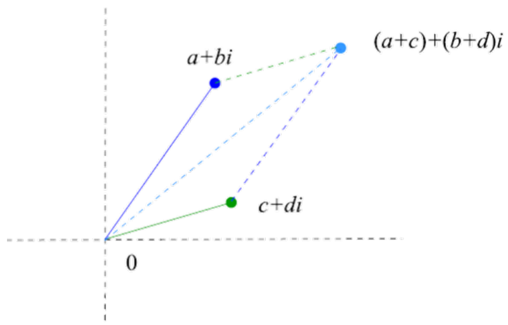
$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

Una vez que ha sido probada la existencia del cociente, su valor puede hallarse de forma más sencilla. Si se multiplican numerador y denominador por $c-id$, se obtiene inmediatamente

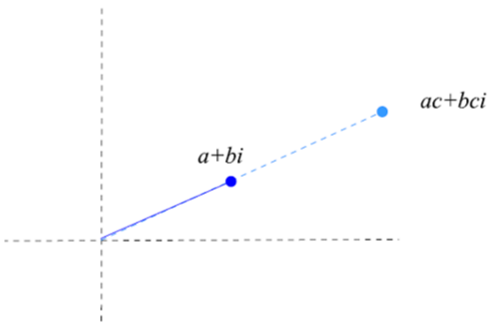
$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)\cdot(c-id)}{(c+id)\cdot(c-id)}=\frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

1.1.3 Geometría de las operaciones de los números complejos

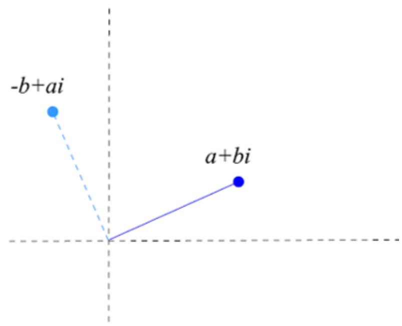
Geométricamente la suma de números complejos se puede ver



El significado geométrico de la multiplicación compleja no es tan obvio. Al multiplicar un complejo a + bi por un número real c se obtiene ac + bci, y esto corresponde a multiplicar el vector (a, b) por el escalar c. Por otro lado, al multiplicar $a + bi$ por i se obtiene $-b + ai$, que corresponde a rotar el vector (a, b) 90 grados, asi que multiplicar $a + bi$ por ci corresponde a rotar (a, b) 90 grados y multiplicarlo por el escalar c.

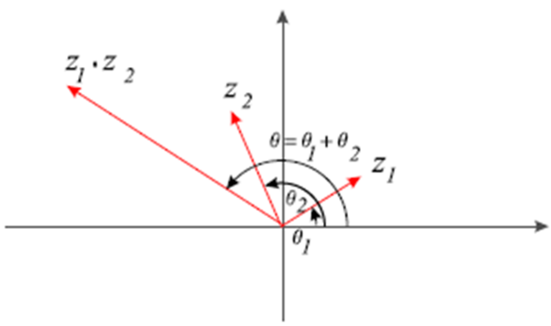


Multiplicación por un real



Multiplicación por i

Entonces multiplicar dos números complejos z_1, z_2, geométricamente es una rotación seguida de una homotecia.



Es claro también que tanto la suma como la multiplicación de complejos cumplen las propiedades de cerradura, conmutatividad y asociatividad.

Proposición 1.1 (*Propiedades de las operaciones*)

Propiedades de la suma de números complejos

- *Si* $z_1 = a_1 + ib_1$ *y* $z_2 = a_2 + ib_2$ *en* $\mathbb{C}$, *tenemos entonces* $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$
- *Si* $z_1 = a_1 + ib_1$ *y* $z_2 = a_2 + ib_2$ *en* $\mathbb{C}$, *tenemos entonces* $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

- *Si* $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ *y* $z_3 = a_3 + ib_3$ *en* $\mathbb{C}$, *tenemos entonces*

$$[z_1 + z_2] + z_3 = z_1 + [z_2 + z_3]$$

♠

Demostración Ejercicio

■

Proposición 1.2 (*Propiedades de la multiplicación*)

Propiedades de la multiplicación de números complejos

- *Si* $z_1 = a_1 + ib_1$ *y* $z_2 = a_2 + ib_2$ *en* $\mathbb{C}$, *tenemos entonces* $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C}$
- *Si* $z_1 = a_1 + ib_1$ *y* $z_2 = a_2 + ib_2$ *en* $\mathbb{C}$, *tenemos entonces* $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
- *Si* $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ *y* $z_3 = a_3 + ib_3$ *en* $\mathbb{C}$, *tenemos entonces*

$$[z_1 \cdot z_2] \cdot z_3 = z_1 \cdot [z_2 \cdot z_3]$$

♠

Demostración Ejercicio

■

1.2 El campo de los números complejos

El campo de los números complejos $\mathbb{C}$ es el resultado de unirse al campo de los números reales. $\mathbb{R}$ una unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$ tal que $i^2 = -1$.

Teorema 1.1 (*El campo de los números complejos*)

Existe un campo $\mathbb{C}$ *con la siguiente propiedad: El campo* $\mathbb{R}$ *de números reales es un subcampo de* $\mathbb{C}$, *es decir,* $\mathbb{R}$ *es un subconjunto de* $\mathbb{C}$, *y la suma y la multiplicación en* $\mathbb{R}$ *son las restricciones a* $\mathbb{R}$ *de la suma y multiplicación en* $\mathbb{C}$.

♡

Demostración

- Asociatividad y conmutatividad tanto para la suma como para la multiplicación en $\mathbb{C}$ (ya se probaron)
- Neutro Aditivo en $\mathbb{C}$. Existe un elemento (único) $0 \in \mathbb{C}$ con la propiedad $z + 0 = z, \ \forall\, z \in \mathbb{C}$.

  Para esto se tiene que

$$(a_1 + b_1) + (x + iy) = (a_1 + ib_1)$$

  por lo tanto, $x, y \in \mathbb{R}$ deben ser el neutro aditivo del campo de los números reales, y $x = y = 0$. Por lo tanto, el **neutro aditivo** del campo de los números complejos $\mathbb{C}$ es $\boxed{(0 + 0i)}$ entonces de la definición de igualdad de números complejos, se tiene

$$a_1 + x = 0 \quad y \quad b_1 + y = 0$$

- Inverso Aditivo en $\mathbb{C}$. Para $(a_1 + ib_1) \in \mathbb{C}$ arbitrario, se tiene que existe $(x + iy) \in \mathbb{C}$ tal que

$$(a_1 + b_1) + (x + iy) = (a_1 + ib_1)$$

  Para esto se tiene que

$$(a_1 + b_1) + (x + iy) = (0 + i0)$$

  por lo tanto, $x, y \in \mathbb{R}$ deben ser el inversos aditivo del campo de los números reales, y $x = -a_1$, $y = -b_1$. Por lo tanto, el **inverso aditivo** del campo de los números complejos de $a_1 + ib_1$ es $\boxed{(-a_1 - b_1 i)}$

- Neutro Multiplicativo en $\mathbb{C}$. Para $(a_1 + ib_1) \in \mathbb{C}$ arbitrario, se tiene que existe $(x + iy) \in \mathbb{C}$ tal que

$$(a_1 + b_1) \cdot (x + iy) = (a_1 + ib_1)$$

En este caso. Para $(a_1 + ib_1) \in \mathbb{C}$ arbitrario, se tiene que

$$(a_1 + b_1)(x + iy) = (a_1 x - b_1 y) + i(a_1 y + x b_1)$$

entonces de la definición de igualdad de números complejos, se tiene que

$$a_1 x - b_1 y = a_1 \quad y \quad a_1 y + x b_1 = b_1$$

por lo tanto, resolviendo el sistema de ecuaciones en las variables $x, r \in \mathbb{R}$, se tiene

$$x = 1 \quad y \quad y = 0$$

por lo tanto el **neutro multiplicativo** del campo del campo de los números complejos $\mathbb{C}$ es $\boxed{(1 + 0i)}$

- Inverso Multiplicativo en $\mathbb{C}$. Para $(a_1 + ib_1) \in \mathbb{C}$ arbitrario, existe $(x + iy) \in \mathbb{C}$ tal que

$$(a_1 + b_1) \cdot (x + iy) = (1 + i0)$$

Para hallar el inverso multiplicativo de $a + ib$ se procede

$$(a + ib)(x + iy) = 1 \;\Rightarrow\; (ax - by) + (ay + bx)i = 1$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} ax - by = 1 & (1) \\ ay + bx = 0 & (2) \end{array}$$

Multiplicando (1) por a y (2) por b y sumando

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{c} a^2 x - aby = a \\ aby + b^2 x = 0 \\ -------- \\ a^2 x + b^2 x = a \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \; x = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

Multiplicando (1) por b y (2) por a y

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{c} axb - b^2 y = b \\ a^2 y + bax = 0 \\ -------- \\ -b^2 y - a^2 y = b \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \; y = -\frac{b}{a^2 + b^2}$$

por lo tanto el **inverso multiplicativo** de $a + ib$ es $\boxed{\dfrac{a}{a^2 + b^2} - i\dfrac{b}{a^2 + b^2}}$

- Propiedad distributiva en $\mathbb{C}$. Considere, por una lado

$$\begin{aligned} [(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2)](a_3 + ib_3) &= [(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)](a_3 + ib_3) \\ &= [(a_1 + a_2)a_3 - (b_1 + b_2)b_3] + i[(a_1 + a_2)b_3 + (b_1 + b_2)a_3] \\ &= (a_1 a_3 + a_2 a_3 - b_1 b_3 - b_2 b_3) + i(a_1 b_3 + a_2 b_3 + b_1 a_3 + b_2 a_3) \end{aligned}$$

y por el otro lado

$$\begin{aligned} (a_1 + ib_1)(a_3 + ib_3) + (a_2 + ib_2)(a_3 + ib_3) &= (a_1 a_3 - b_1 b_3) + i(a_1 b_3 + b_1 a_3) + (a_2 a_3 - b_2 b_3) + i(a_2 b_3 + b_2 a_3) \\ &= (a_1 a_3 - b_1 b_3 + a_2 a_3 - b_2 b_3) + i[a_1 b_3 + b_1 a_3 + a_2 b_3 + b_2 a_3] \end{aligned}$$

Es fácil verificar que los dos resultados coinciden, por lo tanto

$$[(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2)](a_3 + ib_3) = (a_1 + ib_1)(a_3 + ib_3) + (a_2 + ib_2)(a_3 + ib_3)$$

De manera semejante, considere por un lado

$$\begin{aligned}(a_1 + ib_1)[(a_2 + ib_2) + (a_3 + ib_3)] &= (a_1 + ib_1)[(a_2 + a_3) + i(b_2 + b_3)] \\ &= [a_1(a_2 + a_3) - b_1(b_2 + b_3)] + i[a_1(b_2 + b_3) + b_1(a_2 + a_3)] \\ &= (a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3) + i(a_1b_2 + a_1b_3 + b_1a_2 + b_1a_3)\end{aligned}$$

y por el otro

$$\begin{aligned}(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) + (a_1 + ib_1)(a_3 + ib_3) &= [(a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2)] + [(a_1a_3 - b_1b_3) + i(a_1b_3 + b_1a_3)] \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2 + a_1a_3 - b_1b_3) + i(a_1b_2 + b_1a_2 + a_1b_3 + b_1a_3)\end{aligned}$$

Es fácil verificar que los dos resultados coinciden, por lo tanto

$$(a_1 + ib_1)[(a_2 + ib_2) + (a_3 + ib_3)] = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) + (a_1 + ib_1)(a_3 + ib_3)$$

■

Proposición 1.3 (Igualdad de números complejos)

Dados $x, y, u, v \in \mathbb{R}$, si $x + iy = u + iv$, entonces $x = u$, $y = v$

Demostración Si $y \neq v$, entonces $v - y \neq 0$, por lo que $i = \dfrac{x-u}{v-y}$. Dado que $\dfrac{x-u}{v-y}$ es un número real, $\left(\frac{x-u}{v-y}\right)^2 \geq 0$, sin embargo, $i^2 = -1$, lo que nos lleva a una contradicción. Por tanto $y = v$. De aquí que $iy = iv$, por lo cual $x + iy = u + iv$. Usando las leyes de cancelación para la suma, obtenemos que $x = u$ ■

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Pruebe las propiedades de cerradura, asociativa y conmutativa de la suma y la multiplicación de números complejos
2. Use únicamente los axiomas de campo. Para dar una demostración formal de la siguiente igualdad

$$Si \;\; z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \;\; entonces \;\; \frac{1}{z_1z_2} = \frac{1}{z_1}\frac{1}{z_2}$$

3. Use únicamente los axiomas de campo. Para dar una demostración formal de la siguiente igualdad

$$Si \;\; z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \;\; entonces \;\; \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{z_1 + z_2}{z_1z_2}$$