Variable Compleja

Notas del curso Variable Compleja 1

Unidad 1

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Ofelia Cepeda Camargo & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 1. Introducción

LUGARES GEOMÉTRICOS, EN EL PLANO COMPLEJO

Hemos visto que a cada número complejo z le corresponde un punto específico en el plano $\mathbb{R}^2$. De manera análoga, las ecuaciones y desigualdades con una variable z pueden representarse por medio de curvas y áreas en el plano z.

1.1 Rectas en el Plano Complejo

La ecuación de una recta en el plano $\mathbb{R}^2$ es

$$Ax + By + C = 0$$

Si $z = x + iy$ y $\overline{z} = x - iy$ entonces

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad y \quad y = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

por lo que

$$\begin{aligned} Ax + By + C = 0 \;&\Rightarrow\; A\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right) + B\left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right) + c = 0 \quad \left(\frac{1}{i} = -i\right) \\ &\Rightarrow\; A\frac{z}{2} + A\frac{\overline{z}}{2} - iB\frac{z}{2} + iB\frac{\overline{z}}{2} + C = 0 \\ &\Rightarrow\; A\frac{\overline{z}}{2} + iB\frac{\overline{z}}{2} + A\frac{z}{2} - iB\frac{z}{2} + C = 0 \\ &\Rightarrow\; \overline{z}\left(\frac{A}{2} + i\frac{B}{2}\right) + z\left(\frac{A}{2} - i\frac{B}{2}\right) + C = 0 \\ &\Rightarrow\; \overline{z}\left(\frac{A+iB}{2}\right) + z\left(\frac{A-iB}{2}\right) + C = 0 \end{aligned}$$

Sea $\alpha = \dfrac{A+iB}{2} \in \mathbb{C} - \{0\}$ y $C \in \mathbb{R}$ entonces la ecuación de la recta es

$$\alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z + C = 0$$

Ejemplo 1.1 Hallar la expresión compleja de la ecuación de la recta $2x + 3y = 4$
En este caso

$$A = 2,\; B = 3, \alpha = \frac{2+3i}{2}$$

por lo tanto la expresión compleja de la recta $2x + 3y = 4$ es

$$\left(1 + i\frac{3}{2}\right)\overline{z} + \left(1 - i\frac{3}{2}\right)z = 4$$

1.2 Circunferencia en el Plano Complejo

La ecuación de una circunferencia con centro (a, b) y de radio r es

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow\ x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

Haciendo, $D=-2a$, $E=-2b$, $F=a^2+b^2-r^2$, se tiene que la ecuación general de una circunferencia en el plano cartesiano es

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

Teniendo en cuenta que

$$x=\frac{z+\overline{z}}{2},\quad y=\frac{z-\overline{z}}{2i},\quad |z|^2=z\overline{z}=x^2+y^2$$

se tiene

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0\ \Rightarrow\ |z|^2+D\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)+E\left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)+F=0$$

$$\Rightarrow\ z\overline{z}+\frac{D}{2}z+\frac{D}{2}\overline{z}-\frac{Ei}{2}z+\frac{Ei}{2}\overline{z}+F=0$$

$$\Rightarrow\ z\overline{z}+\frac{D}{2}z-\frac{Ei}{2}z+\frac{D}{2}\overline{z}+\frac{Ei}{2}\overline{z}+F=0$$

$$\Rightarrow\ z\overline{z}+\left(\frac{D}{2}-\frac{Ei}{2}\right)z+\left(\frac{D}{2}+\frac{Ei}{2}\right)\overline{z}+F=0$$

$$\Rightarrow\ z\overline{z}+\left(\frac{D-Ei}{2}\right)z+\left(\frac{D+Ei}{2}\right)\overline{z}+F=0$$

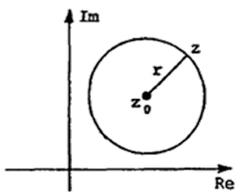
Tomando $\alpha=\dfrac{D+Ei}{2}\in\mathbb{C}$ se tiene la ecuación

$$z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+F=0$$

Ejemplo 1.2 Hallar la expresión compleja de la ecuación de la circunferencia $(x+2)^2+(y+3)^2=4$
En este caso $a=2\ \Rightarrow\ D=-2a=-4$, $b=3\ \Rightarrow\ E=-2b=-6$, $F=a^2+b^2-r^2\ \Rightarrow\ F=9$ por lo tanto la expresión compleja es

$$z\overline{z}+\overline{\left(\frac{-4-6i}{2}\right)}z+\left(\frac{-4-6i}{2}\right)\overline{z}+9=0$$

La ecuación de la circunferencia también se puede escribir en forma compleja, utilizando el módulo. Si C es una circunferencia con centro en z_0 y radio r,



entonces la ecuación de la circunferencia es

$$|z-z_0|=r$$

pero elevando al cuadrado tenemos

$$|z-z_0|^2=r^2\ \Rightarrow\ \left(\sqrt{(z-z_0)\overline{(z-z_0)}}\right)^2=r^2$$

$$\Rightarrow\ (z-z_0)\overline{(z-z_0)}=r^2$$

$$\Rightarrow\ |z|^2-\overline{z_0}z-z_0\overline{z}+|z_0|^2$$

Notemos que los coeficientes de z y $\overline{z}$ son conjugados entre sí. Es natural considerar entonces una ecuación de segundo grado del tipo

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0, \quad A,B,C,D\in\mathbb{R}$$

y aplicarle un procedimiento ya descrito para obtener una ecuación del tipo

$$A|z|^2+\overline{E}z+E\overline{z}+D=0 \quad E=\frac{1}{2}(B+iC)$$

Como podemos ver, la ecuación anterior representa una recta si $A=0$ y una circunferencia si $A\neq 0$.

Ejemplo 1.3 Encuentre la expresión cartesiana de la ecuación comlpleja $|z-1|=4$

En este caso si $z=x+iy$ tenemos entonces

$$\begin{aligned}
|z-1|=4 &\Rightarrow |x+iy-1|=4\\
&\Rightarrow |(x-1)+iy|^2=4^2\\
&\Rightarrow ((x-i)+iy)\overline{((x-1)+iy)}=16\\
&\Rightarrow ((x-i)+iy)((x-1)-iy)=16\\
&\Rightarrow (x-1)^2+y^2=16
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.4 Escribir la ecuación $25x^2+16y^2=400$ en términos de las coordenadas conjugadas complejas z y $\overline{z}$

En este caso, como

$$z=x+iy \quad y \quad \overline{z}=x-iy$$

Al sumar se obiene

$$z+\overline{z}=2x \Rightarrow x=\frac{1}{2}(z+\overline{z})$$

Al restar se obiene

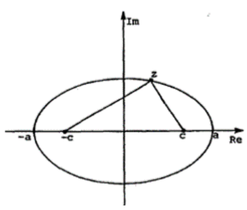
$$z-\overline{z}=2iy \Rightarrow y=\frac{1}{2i}(z-\overline{z})$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
25x^2+16y^2=400 &\Rightarrow 25\left(\frac{1}{2}(z+\overline{z})\right)^2+16\left(\frac{1}{2i}(z-\overline{z})\right)=400\\
&\Rightarrow 25(z+\overline{z})^2-16(z-\overline{z})^2=1600\\
&\Rightarrow 25z^2+50z\overline{z}+25\overline{z}^2-16z^2+32z\overline{z}-16\overline{z}^2=1600\\
&\Rightarrow 9z^2+9\overline{z}^2+82z\overline{z}=1600
\end{aligned}$$

1.3 Elipse en el Plano Complejo

Una elipse se define como el conjunto de todos los puntos $z\in\mathbb{C}$ tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos $\pm c$, llamados focos, es constante.



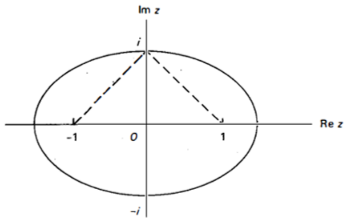
Por tanto, la ecuación de una elipse en el plano complejo es

$$|z + c| + |z - c| = 2a$$

Ejemplo 1.5 ¿Cuál es la ecuación de la elipse que pasa a través de i y que tiene sus focos en ± 1 ?
En este caso como $z - z_0$ es el vector que va de z_0 a z, la definición de la elipse conduce a

$$|z - 1| + |z + 1| = c$$

donde c es una constante real. Como $z = i$ debe satisfacer la ecuación, se tiene



$$c = |i - 1| + |i + 1| = 2\sqrt{2}$$

Así, la elipse está dada por

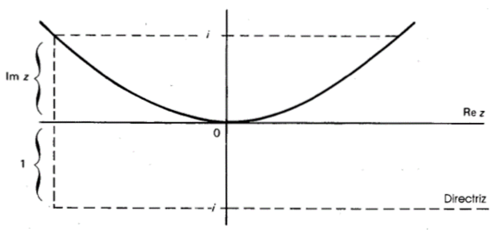
$$|z - 1| + |z + 1| = 2\sqrt{2}$$

1.4 Parábola en el Plano Complejo

Una parábola se define como el conjunto de todos los puntos cuya distancia a un punto dado, llamado foco, es igual a su distancia a una recta fija llamada directriz.
Ejemplo 1.6 Encuentre la ecuación de la parábola que tiene i como foco y la recta $Im\ z = -l$ como directriz.
Por definición, obtenemos

$$|z - i| = Im\ z + 1$$

ya que el punto de la directriz más cercano a un punto z, es el que se localiza verticalmente abajo de él



1.5 Hipérbola en el Plano Complejo

Una hipérbola está constituida de todos los puntos z tales que el valor absoluto de la diferencia entre las distancias de z a dos puntos fijos, llamados focos, es una constante.
Ejemplo 1.7 ¿Cuál es la ecuación de la hipérbola con focos ± 1, que pasa por el punto $1 + i$?
Por definición, tenemos

$$|\,|z - 1| - |z + 1|\,| = c$$

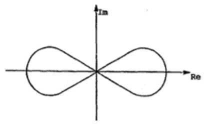
donde c es una constante. Como el punto $z = 1 + i$ satisface la ecuación, encontramos que $c = \sqrt{5} - 1$

Ejemplo 1.8 Encuentre el lugar geométrico de los puntos $z \in \mathbb{C}$ tales que $|z^2 - 1| = s > 0$

En este caso si $z = x + iy$, entonces

$$\begin{aligned} |z^2 - 1| = s \;&\Rightarrow\; |z^2 - 1|^2 = s^2 \\ &\Rightarrow\; |\,(x^2 - y^2 - 1) + 2xyi\,|^2 = s^2 \\ &\Rightarrow\; (x^2 + y^2)^2 - 2x^2 + 2y^2 + 1 = s^2 \\ &\Rightarrow\; (x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2) + (s^2 - 1) \end{aligned}$$

representa la lemniscata de Bernoulli, como se muestra en la figura



Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Describa el lugar geométrico que representa la ecuación $Re(z^2) = p$ con $p \in \mathbb{R}$ y $p > 0$
2. Describa el lugar geométrico que representa la ecuación $Im(z^2) = p$ con $p \in \mathbb{R}$ y $p > 0$