Variable Compleja

Notas del curso Variable Compleja 1

Unidad 1

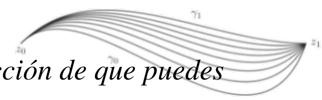
Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Ofelia Cepeda Camargo & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1



La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 1. Introducción

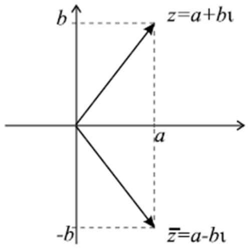
1.1 Álgebra y Geometría de los números complejos

1.2 El conjugado de un número complejo

Definición 1.1 (Conjugado de un número complejo)

Si a y b son números reales, y z es el número complejo $a+ib$, entonces al número complejo $a-ib$ se le denomina el conjugado de z, y se denota $\overline{z} = a - ib$ ♣

Geométricamente, el conjugado $\overline{z}$ de z se obtiene al reflejar z con respecto del eje real.



Propiedad *Si z y w son números complejos, entonces:*

1. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
2. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3. $Re(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$
4. $Im(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$
5. *Si z es un número complejo distinto de cero, entonces $z \cdot \overline{z}$ es un número real y positivo*
6. $\overline{\dfrac{z}{w}} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$ *para* $w \neq 0$
7. $\overline{\overline{z}} = z$

Demostración Si $z = a + ib$ y $w = c + id$ entonces:

1. $\overline{z} + \overline{w} = (a - ib) + (c - id) = (a + c) - i(b + d) = \overline{z + w}$
2. $\overline{z} \cdot \overline{w} = (a - ib) \cdot (c - id) = (ac - bd) - i(ad + bc) = \overline{z \cdot w}$
3. $\dfrac{z + \overline{z}}{2} = \dfrac{(a + ib) + (a - ib)}{2} = \dfrac{2a}{2} = a = Re(z)$
4. $\dfrac{z - \overline{z}}{2i} = \dfrac{(a + ib) - (a - ib)}{2i} = \dfrac{2bi}{2i} = b = Im(z)$
5. $z \cdot \overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$
   Como $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a^2 + b^2 \geq 0$, y como alguno de ellos es distinto de cero, entonces $a^2 + b^2 \neq 0$
6. Tenemos que $\overline{w}\overline{\dfrac{z}{w}} = \overline{\dfrac{wz}{w}} = \overline{z}$. Así $\overline{\dfrac{z}{w}} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$
7. $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a + ib}} = \overline{a - ib} = a + ib = z$

■

Comentario Un número es real si (y sólo si) es igual a su conjugado.

Ejemplo 1.1

Sean $z_1, z_2 \mathbb{C}$. Probar que el número $E = z_1 \cdot \overline{z}_2 + \overline{z}_1 \cdot z_2$ es un número real.

Tenemos que

$$\overline{E} = \overline{z_1 \cdot \overline{z}_2 + \overline{z}_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot z_2 + z_1 \cdot \overline{z}_2 = E$$

por lo que $E \in \mathbb{R}$

Ejemplo 1.2 Como aplicación, consideremos la ecuación

$$c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_{n-1} z + c_n = 0$$

Si ζ es una raíz de esta ecuación, $\overline{\zeta}$ será raíz de la ecuación

$$\overline{c_0} z^n + \overline{c_1} z^{n-1} + \cdots + \overline{c_{n-1}} z + \overline{c_n} = 0$$

En particular, si los coeficientes son reales, ζ y $\overline{\zeta}$ son raíces de la misma ecuación, y obtenemos el conocido teorema de que las raíces no reales de una ecuación de coeficientes reales aparecen por parejas de raíces conjugadas.

1.3 El módulo de un número complejo

De acuerdo con la definición del producto de números complejos, tenemos que

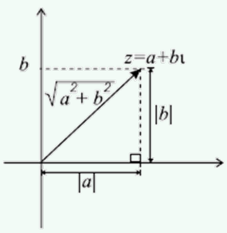
$$z \cdot \overline{z} = (x^2 + y^2) + i(xy - xy) = x^2 + y^2$$

es siempre positivo o cero.

Definición 1.2 (Módulo de un número complejo)

Si z es un número complejo, el módulo de z, que denotaremos $|z|$, se define como la raíz cuadrada no negativa de $z \cdot \overline{z}$, esto es,

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$$



en forma equivalente, $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, o bien

$$z \cdot \frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1$$

♣

Ejemplo 1.3

Tenemos que

$$z_1 = 4 + 3i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$z_2 = -3i \Rightarrow |z_2| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3$$

$$z_3 = 2 \Rightarrow |z_3| = \sqrt{2^2} = 2$$

Propiedad *Para cualesquiera $z, w, z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ se tiene*

a) $|zw| = |z| \cdot |w|$

b) *Si $w \neq 0$, entonces* $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$

c) $-|z| \leq Re(z) \leq |z| \quad y \quad -|z| \leq Im(z) \leq |z|$; *esto es,* $|Re(z)| \leq |z| \quad y \quad |Im\, z| \leq |z|$

d) $|\overline{z}| = |z|$

e) $|z + w| \leq |z| + |w|$

f) $|z - w| \geq \big|\, |z| - |w| \,\big|$

Demostración Tenemos que:

a) $|zw| = \sqrt{zw \cdot \overline{zw}} = \sqrt{zw \cdot \overline{z}\overline{w}} = \sqrt{z\overline{z}w\overline{w}} = \sqrt{z\overline{z}}\sqrt{w\overline{w}} = |z| \cdot |w|$

b) $|w|\left|\frac{z}{w}\right| = \left|w \cdot \frac{z}{w}\right| = |z|$ por lo que $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

c) Si $z = a + ib$, entonces $-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ puesto que $b^2 \geq 0$. La otra se prueba de manera análoga

d) Si $z = a + ib$, entonces $\overline{z} = a - ib$, y claramente tenemos que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = |\overline{z}|$

e) Tenemos que

$$\begin{aligned}|z + w|^2 &= (z + w)\overline{(z + w)} \\ &= (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) \\ &= z\overline{z} + w\overline{w} + w\overline{z} + z\overline{w}\end{aligned}$$

Pero $z\overline{w}$ es el conjugado $w\overline{z}$. Por tanto $|z|^2 + |w|^2 + 2Re(w\overline{z}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|w\overline{z}| = (|z| + |w|)^2$

f) Al aplicar 5 a w y $z-w$ obtenemos que $|z| = |w+(z-w)| \leq |w|+|z-w|$ por tanto $|z-w| \geq |w|+|z-w|$. Al intercambiar los roles de z y w, obtenemos el resultado

■

Comentario Quizá sea conveniente indicar que no existe relación de orden en el sistema de los números complejos, y, por tanto, todas las desigualdades deben verificarse entre números reales.

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Pruebe la identidad $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$, válida para cualesquiera $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
2. Pruebe que si $|z_1| = |z_2| = 1$ y $z_1 z_2 \neq -1$, entonces $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ es un número real.