VARIABLE COMPLEJA

Notas del curso Variable Compleja 1

Unidad 1

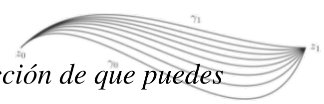
Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Ofelia Cepeda Camargo & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1



La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 1. Introducción

1.1 Conjuntos de puntos en el plano complejo

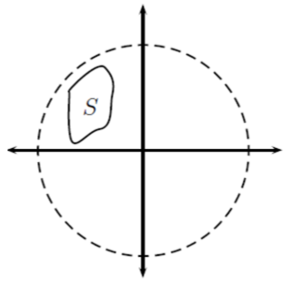
1.2 Conjunto Acotado

Definición 1.1 (Conjunto Acotado)

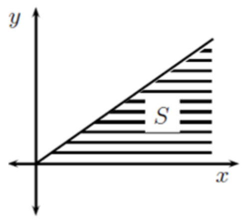
Se dice que un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ es ***acotado*** *en caso de que exista un número real $R > 0$ tal que $\forall\ z \in S$ se cumple $|z| < R$. Es decir S está acotado si se puede encerrar completamente dentro de una vecindad del origen. Si esta condición no se cumple, decimos que S* ***no es acotado****.* ♣

Ejemplo 1.1

En la figura el conjunto S es acotado, por que está completamente contenido dentro del disco circular con líneas punteadas del origen.



Ejemplo 1.2 Conjunto $S \subset \mathbb{C}$ no acotado



1.3 Trayectorias poligonales

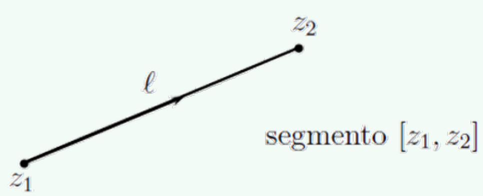
Definición 1.2 (Segmentos de recta)

El segmento de recta ℓ que conecta z_1 y z_2 es el conjunto

$$\{\omega \in \mathbb{C} \,\big|\, \omega = z_1 + t(z_2 - z_1),\ \ 0 \leq t \leq 1\}$$

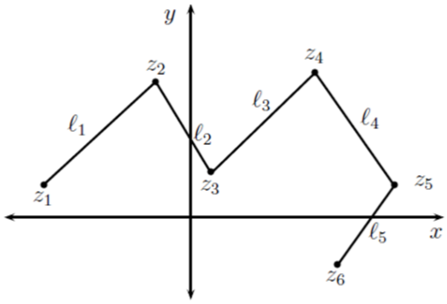
Es decir

$$\ell = [z_1, z_2] = \{\omega \in \mathbb{C} \,\big|\, \omega = z_1 + t(z_2 - z_1),\ \ 0 \leq t \leq 1\}$$



♣

Trayectorias poligonales Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Ahora sea $z_1, z_2, ..., z_{n+1}$, $(n+1)$ puntos en el plano complejo. Para cada $k = 1, 2, ..., n$ sea ℓ_k que denota el segmento de recta que conecta z_k a z_{k+1}. Entonces los sucesivos segmentos de recta $\ell_1, \ell_2, ..., \ell_n$ forman una cadena contínua conocida como **trayectoria poligonal**



1.4 Conjunto Conexo

Definición 1.3 (Conjunto Conexo)

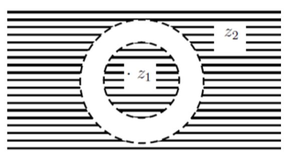
*Sea $S \subset \mathbb{C}$ Un conjunto abierto, S es **conexo** si dados dos puntos cualesquiera del conjunto $z_1, z_2 \in S$, existe una trayectoria poligonal formada por segmentos de recta que los une, y cuyos puntos pertenecen todos al conjunto.*

♣

Ejemplo 1.3

- El conjunto $\mathbb{C}$ de todos los números complejos es conexo.
- El círculo cerrado $S = \{z \mid |z| \leq 1\}$, o el círculo abierto $S = \{z \mid |z| < 1\}$, son ambos conexos

Ejemplo 1.4 El siguiente conjunto es no conexo



Ejemplo 1.5 Muestre que el disco $|z - z_0| < r$ es un conjunto conexo

Demostración Sean $z_1, z_2 \in B(z_0, r)$. El segmento que los une se puede escribir

$$\begin{aligned}
[z_1, z_2] &= z_1 + t(z_2 - z_1) \\
&= z_1 + tz_2 - tz_1 \\
&= tz_2 + (1-t)z_1
\end{aligned}$$

Por lo que tenemos que probar que

$$|(tz_2 + (1-t)z_1) - z_0| < r$$

En este caso se tiene

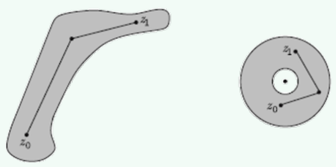
$$
\begin{aligned}
|(tz_2 + (1-t)z_1) - z_0| &= |tz_2 + (1-t)z_1 - (t+1-t)z_0| \\
&= |(t(z_2 - z_0) + (1-t)(z_1 - z_0)| \\
&\leq |t(z_2 - z_0)| + |1-t| \cdot |z_1 - z_0| \\
&= |t| \cdot |z_2 - z_0| + |1-t| \cdot |z_1 - z_0| \\
&= tr + (1-t)r \\
&= tr + r - tr \\
&= r
\end{aligned}
$$

■

1.5 Dominio

Definición 1.4 (Dominio)

Se llama dominio a todo conjunto abierto y conexo del plano complejo



♣

Ejemplo 1.6 El círculo $S = \{S = \{z \,\Big|\, |z - z_0| < r\}\}$ $(r > 0)$ es un dominio

1.6 Región

Definición 1.5 (Región)

Una región es un dominio del plano complejo con todos, algunos o ninguno de sus puntos frontera. ♣

Comentario De la definición, un conjunto abierto es una región (no tiene puntos frontera).

Ejemplo 1.7 Demuestre que una región es un conjunto conexo.

Para esto, sea A una región en C y z_0 en A. Denotamos por O_1 el conjunto de puntos de A que están poligonalmente conectados por z_0 en A y por O_2 el conjunto de puntos en A que no. Ambos conjuntos O_1 y O_2 son abiertos, por ejemplo, O_1 es abierto ya que cada punto z puede estar conectado por cada punto en $N_\epsilon(z)$. Como $A = O_1 \cup O_2$ y A es conexo, se deduce que O_2 está vacío (tenemos $z_0 \in O_1$). Ahora tenemos que cada punto en A puede estar conectado poligonalmente por z_0. Por lo tanto, cada par de puntos en A se puede conectar poligonalmente a través del punto z_0

1.7 Conjunto Compacto

Definición 1.6 (Cubierta abierta)

Una colección de conjuntos abiertos U_α para algún α en algún conjunto de indices I es llamada una cubierta (o una cubierta abierta) de un conjunto S, si S está contenido en su unión: $S \subset \cup_{\alpha \in I} U_\alpha$ ♣

Ejemplo 1.8 La colección de todos los discos abiertos de radio 2 es una cubierta de $\mathbb{C}$:

$$U_z = B(z, 2), \quad \mathbb{C} \subset \cup_{z \in \mathbb{C}} B(z, 2)$$

Definición 1.7 (Conjunto Compacto)

*Un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ es **compacto** si toda cubierta abierta de S tiene una subcubierta finita* ♣

Esto es, si U_α es cualquier colección de conjuntos abiertos cuya unión contiene a S, entonces existe una subcolección finita $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2, \cdots, U_{\alpha-k}}$ tal que

$$S \subset U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2 \cup, \cdots, \cup U_{\alpha-k}}$$

Ejemplo 1.9 El conjunto vacío y todo conjunto finito son compactos

Ejemplo 1.10 El conjunto $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ no es compacto. Si

$$G_n = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 - \frac{1}{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \right\}$$

entonces $\{G_1, G_2, G_3, \ldots\}$ son una cubierta abierta para D, pero no existe una subcubierta finita

Proposición 1.1 (Caracterización de los conjuntos compactos)

Sea S un subconjuntos compacto de $\mathbb{C}$. Entonces se tiene que

1. *S es compacto*
2. *S es cerrado y acotado* ♠

Demostración Similar a la prueba en $\mathbb{R}^n$. ■

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Sea el subconjunto siguiente:

$$\Omega = \left\{ z = x + iy \;\middle|\; \forall\, x, y \in \mathbb{Q},\ |z| < 1 \right\}$$

Se pide analizar

(a). ¿Es Ω acotado?

(b). ¿Es Ω compacto?

(c). ¿Es Ω conexo?