Facultad de Ciencias UNAM

VARIABLE COMPLEJA

Notas del curso Variable Compleja 1

Unidad 1

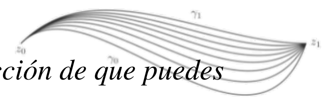
Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Ofelia Cepeda Camargo & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1



La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 1. Introducción

1.1 Raíz cuadrada de un número complejo

Probaremos ahora que la raíz cuadrada de un número complejo puede hallarse de manera explícita. Si el número dado es $a + ib$, buscamos un número $x + iy$ tal que

$$(x + iy)^2 = a + ib$$

.

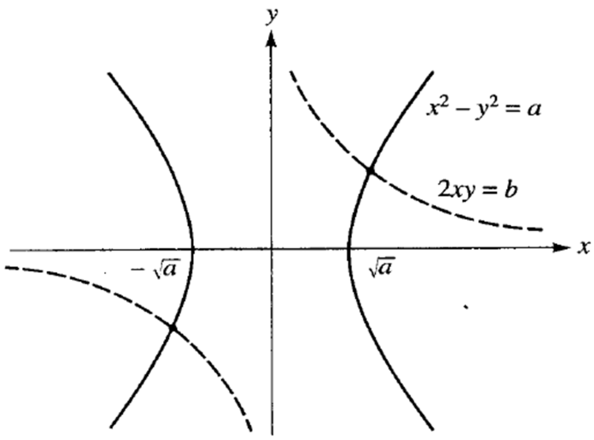
Proposición 1.1 (Ecuaciones de segundo grado)

Sea $z \in \mathbb{C}$. Entonces existe un $w \in \mathbb{C}$ tal que $w^2 = z$. ♠

Demostración Sea $z = a + ib$. Queremos encontrar $w = x + iy$ tal que

$$a + ib = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + (2xy)i$$

así que debemos resolver simultaneamente $x^2 - y^2 = a$ y $2xy = b$. La existencia de tales soluciones es geométricamente clara a partir del examen de las gráficas de las dos ecuaciones. Éstas se muestran en la figura



Tenemos que

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= a \\ 2xy &= b \end{aligned}$$

que es equivalente a

$$\begin{aligned} 4x^4 - 4ax^2 - b^2 &= 0 \\ y &= \frac{b}{2x} \end{aligned}$$

Resolviendo primero para x^2, encontramos que las dos soluciones están dadas por

$$x = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$
$$y = \frac{b}{2x} = \pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\mu$$

donde μ es el signo de b.

$$signo\ b = \begin{cases} 1, & \text{si } b \geq 0 \\ -1, & \text{si} b < 0 \end{cases}$$

Concluimos que la ecuación $w^2 = z$ con $w = x + iy$ tiene solución

$$\pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + \mu\, i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right)$$

■

Ejemplo 1.1

Encuentre las soluciones de las ecuaciones

1. $(z+1)^2 = 3+4i$
2. $z^4 + i = 0$

Tenemos que

1. Sea $w = z+1$ entonces se debe resolver la ecuación $w^2 = 3+4i$.
   Sustituyendo en la fórmula, se obtiene que $a = 3$ y $b = 4$
   $$x = \sqrt{\frac{\left(3+\sqrt{3^2+4^2}\right)}{2}} = 2 \quad y \quad y = \sqrt{\frac{\left(-3+\sqrt{3^2+4^2}\right)}{2}} = 1$$
   por lo que $w = z+1 = \pm(2+i)$, donde $z = \pm(2+i)-1$. Por lo tanto las soluciones buscadas son
   $$z_1 = 1+i \quad y \quad z_2 = -3-i$$
2. Sea $z^2 = w$ entonces $w^2 = z^4$ y por tanto debemos resolver $w^2 + i = 0$, sustituyendo en la fórmula $a = 0$ y $b = -1$ se obtiene
   $$x = \sqrt{\frac{\left(0+\sqrt{0^2+1^2}\right)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad y \quad y = \sqrt{\frac{\left(-0+\sqrt{0^2+1^2}\right)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
   de donde
   $$w = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$$
   Considere la ecuación $z^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$. Otra vez sustituya en la fórmula, ahora con $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, con lo cual se obtiene
   $$z = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} - i\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\right)$$
   Del otro valor para w se obtienen
   $$z = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\right)$$

1.2 Ecuaciones de segundo grado con números complejos

Consideremos ahora la ecuación cuadrática general con coeficientes complejos

$$az^2 + bz + c = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
az^2 + bz &= -c \\
a\left(z^2 + \frac{bz}{a}\right) &= -c \\
z^2 + \frac{bz}{a} &= -\frac{c}{a} \\
z^2 + \frac{bz}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
\frac{(2az + b)^2}{4a^2} &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
(2az + b)^2 &= b^2 - 4ac
\end{aligned}$$

Si hacemos

$$y = 2az + b \tag{1.1}$$

entonces

$$(2az + b)^2 = b^2 - 4ac \;\Rightarrow\; y^2 = b^2 - 4ac = u + iv$$

la cual tiene solución

$$y_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{r+u}{2}} + \;(signo\; b)\sqrt{\frac{r-u}{2}}i\right)$$

donde $r = |b^2 - 4ac|$. Por lo que de $(1{,}1)$ se tiene

$$z_{1,2} = \frac{1}{2a}(-b + y_{1,2})$$

Ejemplo 1.2 Resolver la ecuación $z^2 + 3iz - 2 = 0$.
En este caso

$$b^2 - 4ac = (3i)^2 - 4(1)(-2) = -9 + 8 = -1, \;\; por \;\; lo \;\; que \;\; u + iv = -1 + 0i, \quad y \quad |r| = |-1| = 1$$

de manera que

$$y_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{1-1}{2}} + i\sqrt{\frac{1+1}{2}}\right) = \pm(i)$$

por lo tanto

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}(-3i \pm i) \;\Rightarrow\; z_1 = \frac{1}{2}(-3i - i) = -2i, \; z_2 = \frac{1}{2}(-3i + i) = -i$$

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Encuentre la solucion de la ecuacion $z^2 = 3 - 4i$
2. Encuentre la solucion de la ecuacion $z^4 - i = 0$