VARIABLE COMPLEJA

Notas del curso Variable Compleja 1

Unidad 1

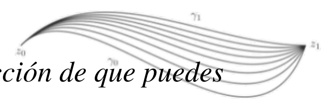
Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Ofelia Cepeda Camargo & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1



La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

1. Unidad 2. Funciones de Variable Compleja **1**

1.1. Función exponencial compleja 1

1.2. Mapeo de la función exponencial 3

Capítulo 1 Problemas para pensar 4

Capítulo 1 Unidad 2. Funciones de Variable Compleja

1.1 Función exponencial compleja

La función exponencial compleja e^z juega un papel destacado en la teoría de la función analítica, no solo por sus propias propiedades importantes, sino porque se utiliza para definir las funciones trigonométricas e hiperbólicas complejas.

La serie de Maclaurin de la función e^x para los números reales es:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Como $i^2 = -1$, entonces para y real tenemos

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + (iy) + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \cdots + + \frac{(iy)^n}{n!} + \cdots \\ &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \cdots\right) \end{aligned}$$

Ahora, recordemos las series de Maclaurin para $\cos y$ y $\operatorname{sen} y$:

$$\begin{aligned} \cos\ y &= 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots \\ \operatorname{sen}\ y &= y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \cdots \end{aligned}$$

Reconocemos estos desarrollos en la serie propuesta para e^{iy} y hacemos la identificación

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \cdots\right) = \cos\ y + i \operatorname{sen}\ y$$

lo anterior junto con la propiedad del cálculo en números reales $e^{s+t} = e^s e^t$ motivan la definición de la función exponencial compleja

Definición 1.1 (Función exponencial compleja)

Dado $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, se define e^z como

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos\ y + i \operatorname{sen}\ y)$$

♣

Es inmediato de esta definición que esta función es una extensión de la exponencial real y que

$$|e^z| = e^x$$

$$\arg z = y + 2k\pi$$

De ello se deduce que e^z nunca es cero. Nótese que si z es real (esto es $y = 0$), esta definición coincide con la función exponencial usual e^x. Ahora bien el término e^z se debe tomar como una abreviatura de $e^x(\cos\ y + i \operatorname{sen}\ y)$ y no como e elevado a la z, dado que, el concepto de exponente complejo no se ha definido aún.

Algunas de las propiedades importantes de la función e^z requieren retomar la definición de función periódica.

Definición 1.2 (Función periódica)

Una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se llama periódica, si existe un $w \in \mathbb{C}$ (llamado periodo) tal que

$$f(z + w) = f(z) \quad \textit{para toda } z \in \mathbb{C}$$

♣

Proposición 1.1 (Propiedades de la función exponencial compleja)

Para $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene

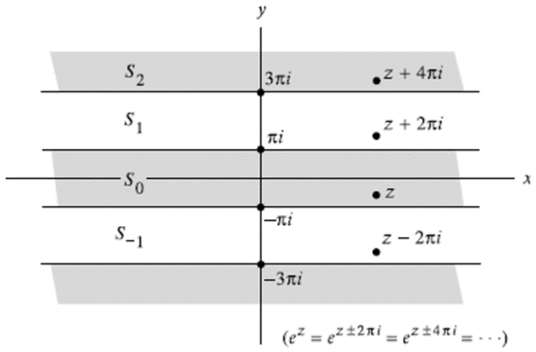
1. $e^{z+w} = e^z e^w$
2. e^z *nunca es cero*
3. $|e^{x+iy}| = e^x$
4. $e^{\frac{i\pi}{2}} = i,\ e^{\pi i} = -1,\ e^{\frac{3i\pi}{2}} = -i,\ e^{2\pi i} = 1$
5. e^z *es periódica, cualquier periodo de* e^z *tiene la forma* $2\pi k i,\ k \in \mathbb{Z}$
6. $e^z = 1$ *si y sólo si* $z = 2n\pi i,\ n \in \mathbb{Z}$

Demostración Tenemos que

1. Sea $z = x + iy$ y sea $w = s + it$. Según la definición
$$\begin{aligned}
e^{z+w} &= e^{(x+s)+i(y+t)} \\
&= e^{x+s}[\cos(y+t) + i\operatorname{sen}(y+t)] \\
&= e^{x+s}[\cos(y)\cos(t) - \operatorname{sen}(y)\operatorname{sen}(t) + i(\operatorname{sen}(y)\cos(t) + \operatorname{sen}(t)\cos(y))] \\
&= e^x e^s(\cos\ y + i\operatorname{sen}\ y)(\cos\ t + i\operatorname{sen}\ t) \\
&= e^x(\cos\ y + i\operatorname{sen}\ y)e^s(\cos\ t + i\operatorname{sen}\ t) \\
&= e^z e^w
\end{aligned}$$
2. Para cada z, tenemos que $e^z \cdot e^{-z} = e^0 = 1$ ya que la función exponencial usual satisface $e^0 = 1$. Así, e^z nunca puede ser cero, por que si lo fuera, entonces $e^z \cdot e^{-z}$ sería cero, lo cual no es cierto.
3. Usando la propiedad $|zz'| = |z|\,|z'|$ obtenemos
$$\begin{aligned}
|e^{x+iy}| &= |e^x e^{iy}| \\
&= |e^x|\,|e^{iy}| \\
&= e^x|\cos\ y + i\operatorname{sen}\ y| \ \ ya\ \ que\ \ e^x > 0 \\
&= e^x \ \ ya\ \ que\ \ \cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y = 1
\end{aligned}$$
4. De la definición
   - $e^{\frac{\pi i}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi i}{2}\right) = i$
   - $e^{\pi i} = \cos\ \pi + i\operatorname{sen}\ \pi = -1$
   - $e^{\frac{3\pi i}{2}} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i$
   - $e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + i\operatorname{sen}(2\pi) = 1$
5. Supongamos que $e^{z+w} = e^z$ para toda $z \in \mathbb{C}$. Haciendo $z = 0$, obtenemos $e^w = 1$ y $w = 2k\pi i\ k \in \mathbb{Z}$.
6. $e^0 = 1$, como se ha visto y $e^{2\pi n i} = 1$ pues e^z es periódica, por (6). Recíprocamente, $e^z = 1$ implica que $e^{z+z'} = e^{z'}$ para toda z'; así, por (6), $z = 2\pi n i$ para algún entero n.

■

Dado que, para toda z,
$$e^{z+2\pi i} = e^z$$
vemos que e^z es periódica con un período complejo $2\pi i$. En consecuencia, si dividimos el plano z en las franjas horizontales infinitas
$$S_n = \{x + iy \,\big|\, -\infty < x < \infty,\ (2n-1)\pi < y \leq (2n+1)\pi\} \quad (n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...)$$
como se muestra en la figura



entonces e^z se comportará de la misma manera en cada franja. Es más se deduce que e^z es uno a uno en cada franja S_n.

1.2 Mapeo de la función exponencial

Veamos geométricamente el mapeo $w = e^z$, para esto escribimos $z = x + iy$ y bajo el mapeo

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos\ y + i \operatorname{sen}\ y) = e^x \cos\ y + ie^x \operatorname{sen}\ y$$

Por lo que en $w = u(x,y) + iv(x,y) = e^x \cos\ y + ie^x \operatorname{sen}\ y$

- Para la recta vertical (a,y) se tiene $u(a,y) = e^a \cos\ y$ y $v(a,y) = e^a \operatorname{sen}\ y$ de aqui

$$u(a,y) = e^a \cos\ y \ \Rightarrow \ \frac{u(a,y)}{e^a} = \cos\ y$$

$$v(a,y) = e^a \operatorname{sen}\ y \ \Rightarrow \ \frac{v(a,y)}{e^a} = \operatorname{sen}\ y$$

$$\left(\frac{u(a,y)}{e^a}\right)^2 + \left(\frac{v(a,y)}{e^a}\right)^2 = \cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y = 1$$

  por lo que $u^2 + v^2 = (e^a)^2$ un círculo de radio e^a

- Para la recta vertical (b,y) se tiene $u(b,y) = e^b \cos\ y$ y $v(b,y) = e^b \operatorname{sen}\ y$ de aqui

$$u(b,y) = e^b \cos\ y \ \Rightarrow \ \frac{u(b,y)}{e^b} = \cos\ y$$

$$v(b,y) = e^b \operatorname{sen}\ y \ \Rightarrow \ \frac{v(b,y)}{e^b} = \operatorname{sen}\ y$$

$$\left(\frac{u(b,y)}{e^b}\right)^2 + \left(\frac{v(b,y)}{e^b}\right)^2 = \cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y = 1$$

  por lo que $u^2 + v^2 = (e^b)^2$ un círculo de radio e^b

- Para la recta horizontal (x,b) se tiene $u(x,b) = e^x \cos\ b$ y $v(x,b) = e^x \operatorname{sen}\ b$ de aqui

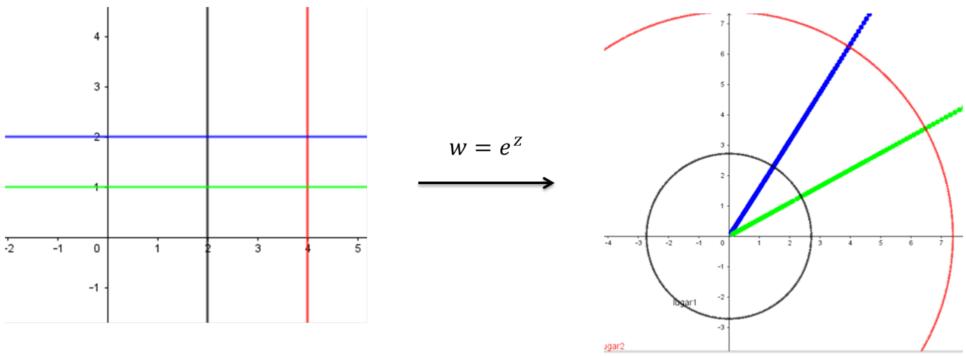
$$\frac{v(x,b)}{u(x,b)} = \frac{e^x \operatorname{sen}\ b}{e^x \cos\ b} = \tan\ b \ \Rightarrow \ v = \tan(b)u$$

  una recta al origen con pendiente $\tan\ b$

- Para la recta horizontal (x,a) se tiene $u(x,a) = e^x \cos\ a$ y $v(x,a) = e^x \operatorname{sen}\ a$ de aqui

$$\frac{v(x,a)}{u(x,a)} = \frac{e^x \operatorname{sen}\ a}{e^x \cos\ a} = \tan\ a \ \Rightarrow \ v = \tan(a)u$$

  una recta al origen con pendiente $\tan\ a$



Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Muestre que $e^z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ si y sólo si $z = \left(\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right) i$, $\;k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$