Variable Compleja

Notas del curso Variable Compleja 1

Unidad 1

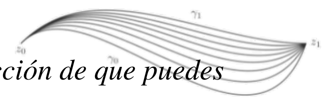
Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Ofelia Cepeda Camargo & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1



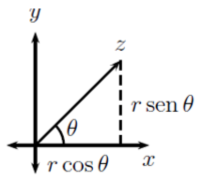
La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 1. Introducción

1.1 Forma polar de un número complejo

Un vector distinto de cero se puede describir mediante coordenadas polares (r, θ), así como por las coordenadas rectangulares (x, y). Este hecho conduce a lo siguiente: Podemos considerar al número complejo $z = x + iy$ como un vector cuyo punto de origen es $(0, 0)$.



Llamemos r a la distancia desde el origen hasta el punto (x, y) y θ al ángulo que forma el vector con el semieje real positivo.
Si $z = x + iy$, tenemos la conocida relación entre las coordenadas cartesianas y las coordenadas polares:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\theta$$

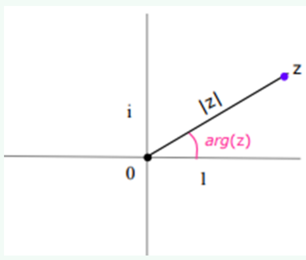
donde $r = |z|$ es el módulo de z y θ es el argumento de z.
El ángulo θ se considera positivo cuando se mide en la dirección contraria a la de las manecillas del reloj y negativo cuando se mide en la dirección de las manecillas del reloj.

Definición 1.1 (Forma polar de un número complejo)

*Cualquier número complejo $z \in \mathbb{C}$ y $z \neq 0$ se puede escribir en la forma siguiente, llamada **forma polar***

$$z = x + iy = \rho(\cos\ \theta + i\operatorname{sen}\ \theta)$$

*donde $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ es llamada el **módulo** de z y θ es llamado el **argumento** de z.*



♣

Cabe señalar que $|z| = 0$ implica que $x = 0$ e $y = 0$. Geométricamente, $|z|$ es la distancia del punto z desde el origen. También,

$$Re(z) = x \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

Cabe señalar que el módulo de cualquier número complejo es un valor único en función de sus partes real e imaginaria, mientras que el argumento no lo es, ya que si θ es un valor del argumento, también lo es $2n\pi + \theta$, donde $n = 0, \pm1, \pm2, ...$ El valor de el argumento que se encuentra entre $-\pi$ y π, para ser más precisos, que satisface de las siguientes desigualdades:

$$-\pi < \theta \leq \pi, \quad -\pi \leq \theta < \pi$$

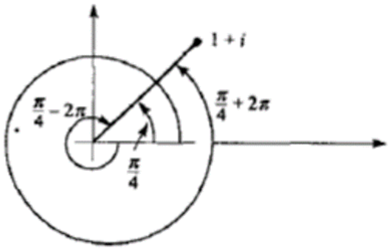
se llama el **valor principal** del argumento. Estos valores se pueden hallar con la ecuación $\tan\ \theta = \left|\frac{y}{x}\right|$ donde hay que especificar el cuadrante que contiene al punto z. El conjunto de todos esos valores se denota por $\arg(z)$.

$$\arg(z) = \left\{\theta \in \mathbb{R} \mid \tan\ \theta = \left|\frac{y}{x}\right|\right\}$$

Ejemplo 1.1 Escribir en forma polar el número complejo $z = 1 + i$.

En este caso

- $\rho = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ entonces $\rho = \sqrt{2}$
- $\tan\ \theta = \left|\frac{1}{1}\right| = 1$ implica que $\theta = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$ radianes. Así, en este caso $\theta = \frac{\pi}{4} + n2\pi,\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$



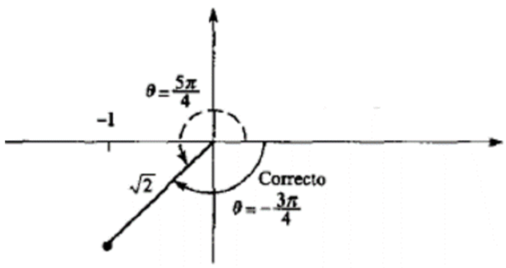
La forma polar para $z = 1 + i$

$$z = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$
$$z = 1 \cdot \left(\cos\frac{9\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{9\pi}{4}\right)$$
$$z = 1 \cdot \left(\cos\frac{17\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{17\pi}{4}\right)$$
$$z = 1 \cdot \left(\cos\frac{-7\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{-7\pi}{4}\right)$$
$$\vdots = \vdots$$
$$z = 1 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)\right)$$

En este ejemplo $\frac{\pi}{4}$ se llama el **argumento principal** de $z = 1 + i$ note que $-\pi < \frac{\pi}{4} \leq \pi$

Ejemplo 1.2 Usando el argumento principal determine las coordenadas polares del punto que representa al número complejo $z = -1 - i$.

La distancia polar ρ de -1 -i es $\sqrt{2}$, como podemos ver en la figura.



El valor principal de θ es $-\frac{3\pi}{4}$ radianes. No es $\frac{5\pi}{4}$ pues este número es superior a π. Al calcular valores principales no se debe hacer lo que indica la línea punteada de la figura, o sea, cruzar la parte negativa del eje real. Por lo que todos los valores de arg $(-1 - i)$ están contenidos en la expresión

$$\theta = -\frac{3\pi}{4} + 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Comentario Tomando $n = 1$ en la expresión anterior, obtenemos el valor no principal $\frac{5\pi}{4}$.

La ecuación $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ que podría usarse para obtener θ, particularmente si se usa una calculadora de bolsillo, requiere una observación. Sabemos, por la trigonometría elemental, que aun estipulando el valor de $\frac{y}{x}$, esta ecuación no contiene información suficiente para determinar el conjunto de valores de 0. Es necesario precisar el signo de x o y para determinar el conjunto adecuado.

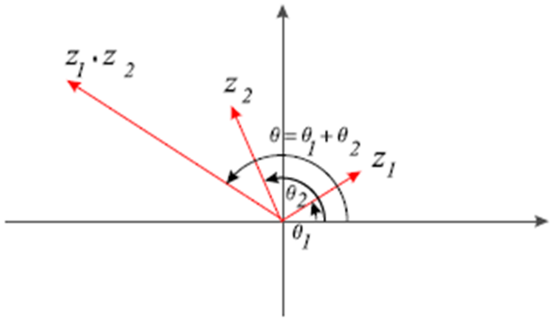
La descripción po1ar es especialmente útil en 1a multiplicación de números complejos. Consideremos

$$z_1 = \rho_1(\cos\ \theta_1 + i\,\text{sen}\ \theta_1)$$
$$z_2 = \rho_2(\cos\ \theta_2 + i\,\text{sen}\ \theta_2)$$

el producto es

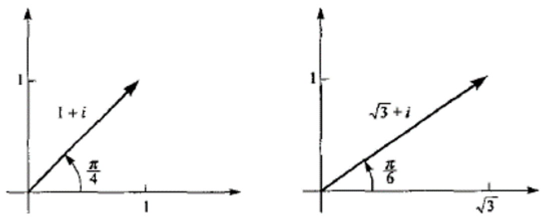
$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (\rho_1(\cos\ \theta_1 + i\,\text{sen}\ \theta_1))(\rho_2(\cos\ \theta_2 + i\,\text{sen}\ \theta_2)) \\ &= \rho_1\rho_2[(\cos\ \theta_1 \cos\ \theta_2 - \text{sen}\ \theta_1\,\text{sen}\ \theta_2)] + i[(\cos\ \theta_1\,\text{sen}\ \theta_2 + \text{sen}\ \theta_1 \cos\ \theta_2)] \\ &= \rho_1\rho_2[\cos\ (\theta_1+\theta_2) + i(\text{sen}\ (\theta_1+\theta_2))] \end{aligned}$$

por lo tanto el resultado de multiplicar dos números complejos es otro número complejo cuyo módulo es el producto de los módulos y cuyo argumento es la suma de los argumentos.



Pero siempre debemos tener presente que el argumento está definido salvo múltiplos de 2π.

Ejemplo 1.3 Sean $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = \sqrt{3} + i$.



Cuyas formas polares son

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\ \frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\ \frac{\pi}{4}\right) \quad y \quad z_2 = 2\left(\cos\ \frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\ \frac{\pi}{6}\right)$$

Sabemos que el producto tendrá módulo $\sqrt{8}$, mientras que el argumento será

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$$

de modo que

$$z_1 \cdot z_2 = \sqrt{8} \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{12}\right)$$

Comentario Naturalmente, el argumento de un número complejo tiene una infinidad de valores posibles. Al sumar los argumentos de dos factores, a fin de obtener el argumento del producto, determinamos uno solo de los valores posibles de dicho argumento. Así, en el ejemplo precedente tiene por argumentos $\frac{5\pi}{12} + 2\pi$, $\frac{5\pi}{12} + 4\pi$ etcétera, ninguno de los cuales se obtuvo con nuestro procedimiento. No obstante, podemos obtener cualquiera de estos resultados sumando algún múltiplo entero de 2π al número $\frac{5\pi}{12}$ que resulta de este procedimiento.

De manera similar, podemos dividir dos números complejos y también, en cierto sentido, sus vectores. Es conveniente usar coordenadas polares para encontrar el inverso de un número complejo, si

$$z = \rho(\cos\ \theta + i\,\text{sen}\ \theta)$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{\rho(\cos\ \theta + i\,\text{sen}\ \theta)} = \frac{(\cos\ \theta - i\,\text{sen}\ \theta)}{(\cos\ \theta + i\,\text{sen}\ \theta)(\cos\ \theta - i\,\text{sen}\ \theta)} \\ &= \frac{\cos\ \theta - i\,\text{sen}\ \theta}{\rho(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)} = \frac{\cos\ \theta - i\,\text{sen}\ \theta}{\rho} = \frac{\cos\ -\theta + i\,\text{sen}\ -\theta}{\rho}\end{aligned}$$

Por lo tanto, el módulo del inverso de un número complejo es el inverso del módulo de dicho número y el argumento del inverso de un número complejo es el argumento del número cambiado de signo.

Consideremos ahora los números complejos

$z_1 = \rho_1(\cos\ \theta_1 + i\,\text{sen}\ \theta_1)$ y $z_2 = \rho_2(\cos\ \theta_2 + i\,\text{sen}\ \theta_2)$.

A fin de dividir z_1 entre z_2 multiplicamos z_1 por $\dfrac{1}{z_2}$.Así

$$\frac{z_1}{z_2} = (\rho_1(\cos\ \theta_1 + i\,\text{sen}\ \theta_1))\left(\frac{1}{\rho_2}(\cos\ -\theta_2 + i\,\text{sen}\ -\theta_2)\right) = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2))$$

El módulo del cociente de dos números complejos es igual a el cociente de sus módulos y el argumento del cociente es igual a la diferencia del argumento del numerador menos el argumento del denominador.

Ejemplo 1.4 Evalúe $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ usando la forma polar de los números complejos.

En este caso

$$\frac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\ \frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\ \frac{\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\ \frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\ \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\ \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\ \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\ \frac{\pi}{12} + i\,\text{sen}\ \frac{\pi}{12}\right)$$

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Muestre lo siguiente $\arg\ \overline{z} = -\arg\ z\ (\mod 2\pi)$
2. Muestre lo siguiente $\arg\ \dfrac{z}{w} = \arg\ z - \arg\ w\ (\mod 2\pi)$