VARIABLE COMPLEJA

Notas del curso Variable Compleja 1

Unidad 2

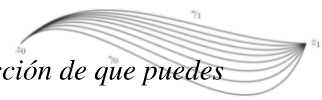
Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Ofelia Cepeda Camargo & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1



La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 2. Funciones de Variable Compleja

1.1 Potencias complejas

Un uso teórico importante de la función logarítmica es definir potencias complejas de z. La definición está motivada por la identidad

$$z^n = \left(e^{\log z}\right)^n = e^{n \log z}$$

que es válida para cualquier número entero n.

Definición 1.1 (Potencias complejas)

Sean $z, w \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ *y* $\log$ *una rama de logaritmo, se define*

$$z^w = e^{w \log\ z}$$

♣

Comentario Esto significa que cada valor de $\log z$ conduce a un valor particular de z^w.

Ejemplo 1.1 Encontrar todos los valores de $(-2)^i$

Solución *Dado que* $\log(-2) = \log\ 2 + (\pi + 2k\pi)i$, *tenemos*

$$(-2)^i = e^{i \log(-2)} = e^{i \log 2} e^{-\pi - 2k\pi} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

por lo que $(-2)^i$ *tiene infinitos valores.* ■

Ejemplo 1.2 Si $z = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{i}{\sqrt{2}}$ y $w = i$ entonces tomando la rama con valores $[-\pi, \pi)$ se tiene

$$z^w = e^{w \log\ z} = e^{i \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)} = e^{i\left(\log\ 1 - \frac{i\pi}{4}\right)} = e^{\frac{\pi}{4}}$$

■

Comentario Obsérvese que, en general, es necesario elegir una rama de logaritmo para que la asociación $z \to z^w$ sea función. Es importante enfatizar que al tomar las distintas ramas de logaritmo, los valores obtenidos difieren por factores de la forma

$$e^{w(2\pi n i)}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Esto se sigue ya que dada una rama de logaritmo denotada por $z \to \log\ z$, cualquier otra es de la forma $z \to \log\ z + 2\pi n i,\ n \in \mathbb{Z}$, por lo cual todas las posibles ramas de z^w son de la forma

$$e^{w(\log\ z + 2\pi n i)} = e^{w \log\ z} e^{w(2\pi n i)}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Proposición 1.1 (Propiedad de la potencia compleja)

Para $z \in \mathbb{C}$ *fija* $(z \neq 0)$, z^w *esta unívocamente determinada, es decir, no depende de la rama de logaritmo que se elija, si y sólo si w es un entero.*

♠

Demostración En este caso

$$\begin{aligned} e^{w \log\ z} e^{w(2\pi n i)} &= e^{w \log\ z} \\ &\Leftrightarrow\ e^{w(2\pi n i)} = 1\ \ \forall\, n \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow\ wn \in \mathbb{Z},\ \forall\, n \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow\ w \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

■

En consecuencia, si w no es entero, para que la asociación $z \to z^w$ sea función, hay que elegir una rama específica de logaritmo.

Proposición 1.2 (Potencias racionales)

Sean $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ y $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ fijos, donde p,q son primos relativos y q es positivo, entonces $z^{\frac{p}{q}}$ toma exactamente q valores que son las raíces q-ésimas de z^p

Demostración Basta analizar cuántos números distintos hay de la forma $e^{\frac{p}{q}(2\pi ni)}$, $n \in \mathbb{Z}$. Se tiene

$$\begin{aligned} e^{\frac{p}{q}(2\pi ni)} &= e^{\frac{p}{q}(2\pi mi)}, \quad n,m \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow \ & \frac{p}{q}(n-m) \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow \ & n \equiv m \pmod{q} \end{aligned}$$

puesto que $(p,q) = 1$, por lo que $z^{\frac{p}{q}}$ toma exactamente q valores. También, para cualquier rama $z \to \log\ z$ se tiene

$$\left(e^{\left(\frac{p}{q}\right)\log\ z}\right)^q = e^{p\ \log\ z} = z^p$$

■

Proposición 1.3

Sean $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ y $w \in \mathbb{C} - \mathbb{Q}$ fijos, entonces z^w toma un número infinito de valores

Demostración Si $w \in \mathbb{C} - \mathbb{Q}$, entonces

$$\begin{aligned} e^{w2\pi ni} &= e^{w2\pi mi}, \quad n,m \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow \ & e^{w2\pi(n-m)i} = 1 \\ \Leftrightarrow \ & w(n-m) \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow \ & n = m \end{aligned}$$

Para el caso $w = x + iy \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ se tiene

$$e^{w2\pi ni} = e^{-2\pi ny}e^{2\pi nix}$$

Por lo que si $e^{w2\pi ni} = e^{w2\pi mi}$, al tomar normas se tiene que

$$e^{-2\pi ny}e^{-2\pi my} \quad y \quad n = m$$

■

El siguiente ejemplo ilustra algunas de las sorprendentes propiedades de exponentes complejos.

Ejemplo 1.3 Considere la función $w = 1^z$. Tenemos que

$$w = 1^z = e^{z\log 1} = e^{2k\pi iz} = e^{2k\pi i(x+iy)} = e^{-2ky\pi}e^{2k\pi ix}$$

Para cada entero k, la función $w = 1^z$ se define en todo el plano. Si $k = 0$, la rama principal del logaritmo, luego $w \equiv 1$. Esto es lo que esperamos. Pero considere una determinación diferente del logaritmo y suponga que $k = k_0$, $k_0 > 0$. La función $w = 1^z$ es entonces periódica, con período $\frac{1}{k_0}$. Si z es un número entero positivo, entonces $1^z = 1$. Si z es real, entonces 1^z es un punto en la circunferencia unidad. De hecho, cada intervalo de la forma

$$x_0 - \frac{1}{2k_0} < x \leq x_0 + \frac{1}{2k_0}, \quad x_0\ fijo$$

mapea uno a uno en el círculo unitario. El segmento de línea

$$-\frac{1}{2k_0} < x \leq \frac{1}{2k_0}, \quad y = y_0$$

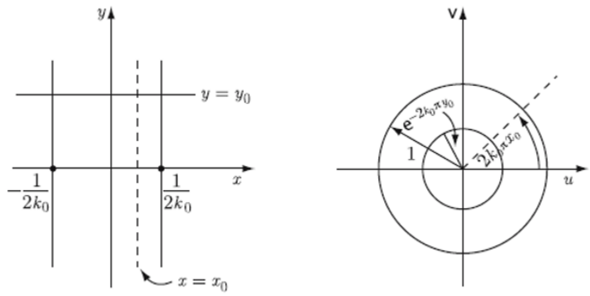
mapea el círculo $|w| = e^{-2k_0\pi y_0}$. La línea

$$x = x_0, \quad -\frac{1}{2k_0} < x_0 \leq \frac{1}{2k_0}$$

mapea en el rayo $Arg\ w = 2k_0\pi x_0$. La franja

$$\left\{ z \;\middle|\; -\frac{1}{2k_0} < Re\ z \leq \frac{1}{2k_0} \right\}$$

mapes en el plano, excluyendo el origen. Finalmente, el semiplano superior es mapeado en el interior del disco de la unidad perforada, y el semiplano inferior en su exterior.



1.2 Raíces n-ésimas

Con base en el concepto de potencias complejas se pueden definir las funciones que son raíces n-ésimas

Definición 1.2 (Raíces n-ésimas)

La función raíz n-ésima, denotada por $\sqrt[n]{z}$ *o* $z^{\frac{1}{n}}$*, se define como*

$$e^{\frac{\log\ z}{n}}$$

donde $\log\ z$ *es una rama del logaritmo* ♣

Comentario Aunque existen una infinidad de estas funciones, se sigue que para un complejo fijo no nulo existen exactamente n raíces n-ésimas. Para mostrar esto, se puede tomar la rama del logaritmo cuya parte imaginaria toma valores en $(0, 2\pi]$, la raíz n-ésima está dada por

$$e^{\frac{\log\ z}{n}} = e^{\left(\frac{\log\ r}{n} + \frac{i\theta}{n}\right)} = \sqrt[n]{|z|}e^{\frac{i\ Arg\ z}{n}}$$

Ejemplo 1.4 Encuentre todos los valores de $(-1)^{\frac{2}{3}}$

Solución *En este caso*

$$(-1)^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}\log(-1)} = e^{\frac{2}{3}i(2k+1)\pi} \quad k = 0, 1, 2, ...$$

■

Ejemplo 1.5 Encuentre el valor de la n-ésima raíz principal del complejo $i^{\frac{1}{3}}$.

Solución *En este caso para* $z = i$*, se tiene* $|z| = 1$ *y* $Arg\ z = \dfrac{\pi}{2}$*. Por lo que*

$$(i)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1}e^{\frac{i\left(\frac{2}{3}\right)}{3}} = e^{\frac{i\pi}{6}} = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{i}{2}$$

■

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Encuentre los valores de $(1+i)^{1-i}$
2. Encuentre los valores de $(1-\sqrt{3}i)^{\frac{1}{5}}$