VARIABLE COMPLEJA

Notas del curso Variable Compleja 1

Unidad 1

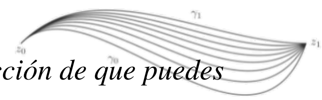
Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Ofelia Cepeda Camargo & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1



La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

1. Unidad 2. Funciones de Variable Compleja **1**

1.1. Función compleja 1

1.2. Descripción Geométrica de Funciones de Variable Compleja 2

1.3. Ejemplos de Funciónes Complejas 3

1.4. Función Lineal 3

1.5. Función Potencia 4

1.6. Funciones Polinomiales 7

1.7. Funciones Racionales 7

Capítulo 1 Problemas para pensar 7

Capítulo 1 Unidad 2. Funciones de Variable Compleja

1.1 Función compleja

Recuerda que una función f es una regla que asigna a cada elemento de un conjunto A uno y solo un elemento de un conjunto B. Si f asigna el valor b al elemento a en A, escribimos

$$b = f(a)$$

y llamar b la imagen de a bajo f. El conjunto A es el dominio de definición de f y el conjunto de todas las imágenes f (a) es el rango de f. A veces nos referimos a f como un mapeo de A en B. Aquí nos interesan las funciones de valores complejos de una variable compleja-

Definición 1.1 (Función Compleja)

Una función compleja es una función cuyo dominio y rango son subconjuntos del conjunto $\mathbb{C}$ de números complejos. ♣

Ejemplo 1.1 Si $f(z)$ se expresa mediante una fórmula como

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}$$

entonces, a menos que se indique lo contrario, tomamos el dominio de f como el conjunto de todo $z \in \mathbb{C}$ para el cual la fórmula está bien definida. (Por lo tanto, el dominio para esta f comprende todo $z \in \mathbb{C}$ excepto para $\pm i$

Ejemplo 1.2 La expresión $z^2 - (2+i)z$ se puede evaluar en cualquier número complejo z y siempre se obtiene sólo un número complejo, y así

$$f(z) = z^2 - (2+i)z$$

define una función compleja. Los valores de f se encuentran usando las operaciones aritméticas para números complejos. En el caso anterior

- $f(i) = (i)^2 - (2+i)(i) = -1 - 2i + 1 = -2i$
- $f(1+i) = (1+i)^2 - (2+i)(1+i) = 2i - 1 - 3i = -1 - i$

Comentario Si w denota el valor de la función f en el punto z, entonces escribimos $w = f(z)$. Así como z se descompone en partes reales e imaginarias como $z = x + iy$, cada una de las partes de w son funciones (en valores reales) de z, de manera equivalente, de x e y, por lo que cada función de este tipo se puede escribir como

$$w = u(x, y) + iv(x, y)$$

donde u y v denotan las partes real e imaginaria, respectivamente, de w. La función de una variable compleja es, en esencia, un par de funciones reales de dos variables.

✍ **Ejercicio 1.1** Exprese $f(z) = z^2$ como un par de funciones reales de dos variables reales.

Solución *Con $z = x + iy$ obtenemos*

$$f(z) = f(x+iy) = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$$

Así,

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad y \quad v(x, y) = 2xy$$

Definición 1.2 (Función uno-uno)

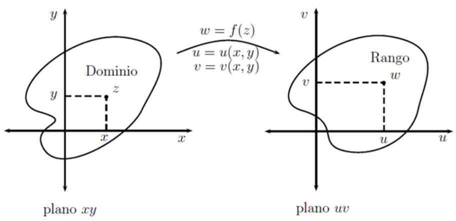
Sea $S \subset \mathbb{C}$, una función f es llamada uno a uno (o univalente o inyectiva) en S si la ecuación $f(z_1) = f(z_2)$ donde $z_1, z_2 \in S$ implica que $z_1 = z_2$ ♣

✍ **Ejercicio 1.2** Determine si la función
$$w = \frac{z-1}{z-2}$$
es uno a uno, y establezca dónde puede definirse la función.

Solución *Suponga que z_1 y z_2 producen el mismo valor de w:*
$$\frac{z_1-1}{z_1-2} = \frac{z_2-1}{z_2-2}$$
Si efectuamos los productos cruzados, tenemos
$$z_1z_2 - 2z_1 - z_2 + 2 = z_1z_2 - z_1 - 2z_2 + 2$$
Cancelamos términos similares para obtener $z_1 = z_2$, lo cual implica que la función es uno a uno.
Si w esta restringida al plano complejo $\mathbb{C}$, entonces la función no está definida en $z = 2$, ya que el denominador se anula.

1.2 Descripción Geométrica de Funciones de Variable Compleja

Las funciones de una variable real $y = f(x)$ pueden describir geométricamente por medio de una gráfica en el plano XY. No es posible una representación tan comoda para $f(z)$, ya que ésta requeriría cuatro dimensiones, dos para cada variable compleja. En lugar de esto, la información acerca de la función se expresa dibujando planos complejos separados para las variables u, v e indicando la correspondencia existente entre puntos, o conjuntos de puntos, en los dos planos.



Ejemplo 1.3 Encuentre la imagen en el plano w de la recta $f(x) = 2x + 4$ en el plano z bajo el mapeo $f(z) = 2z + 6$.

Solución *Escribamos $y = 2x + 4$ y $w = 2z + 6$, $z = x + iy$.*
Si $w = u(x, y) + iv(x, y)$ entonces
$$u(x, y) + iv(x, y) = 2z + 6$$
$$u(x, y) + iv(x, y) = 2(x + iy) + 6$$
$$u(x, y) + iv(x, y) = (2x + 6) + i(2y)$$
$$u(x, y) = 2x + 6$$
$$v(x, y) = 2y$$
resolviendo para x e y, en términos de u,v tenemos:
$$x = \frac{1}{2}(u-6); \qquad y = \frac{1}{2}v$$

luego:

$$
\begin{aligned}
y &= 2x + 4 \\
\frac{1}{2}v &= 2\left(\frac{u-6}{2}\right) + 4 \\
\frac{1}{2}v &= u - 2 \\
v &= 2u - 4
\end{aligned}
$$

Entonces, la imagen de la recta $y = 2x + 4$ en el plano z está representada por $v = 2u - 4$ una recta en el plano w.

✍ **Ejercicio 1.3** Describa el conjunto imagen de la función $f(z) = z^2$ definida en el disco $|z| < 2$, y establezca si este mapeo es uno a uno.

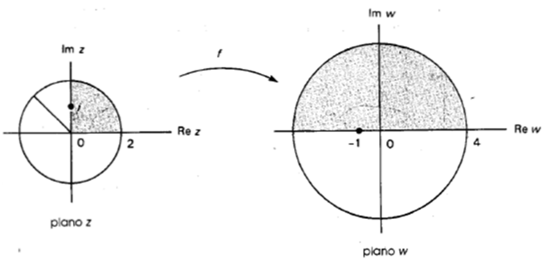
Solución *Si escribimos cada punto del disco en su representación polar*

$$z = r(\cos\ \theta + i\,\text{sen}\ \theta)$$

donde $0 \leq r = |z| < 2$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$, obtenemos

$$w = f(z) = z^2 = r^2(\cos\ \theta + i\,\text{sen}\ \theta)^2 = r^2(\cos\ 2\theta + i\,\text{sen}\ 2\theta)$$

Por tanto, cada argumento se duplica, indicando que el disco $|z| < 2$ se mapea sobre $|w| < 4$ y cada punto de $0 < |w| < 4$ es imagen de dos puntos de $0 < |z| < 2$. Por ejemplo, $z = \pm i$ ambos se mapean en $w = -1$. Por tanto el mapeo no es uno a uno.



1.3 Ejemplos de Funciónes Complejas

1.4 Función Lineal

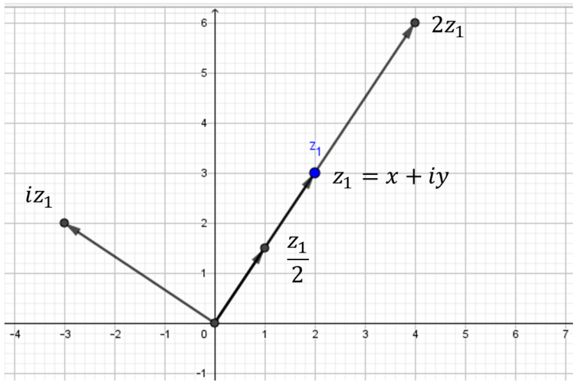
La función lineal $f(z) = cz$, donde $c \in \mathbb{C}$, puede escribirse como:

$$f(z) = f(x + iy) = (a + ib)(x + iy) = (ax - y) + i(bx + ay)$$

Como una función del plano en el plano

$$f(x, y) = (ax - by, bx + ay)$$

1. Si $Im\ c = 0$, f es una homotecia
2. Si $c = i$, f es una rotación de 90 en sentido contrario al de las manecillas del reloj.



En el caso de un número complejo cualquiera de módulo 1, digamos

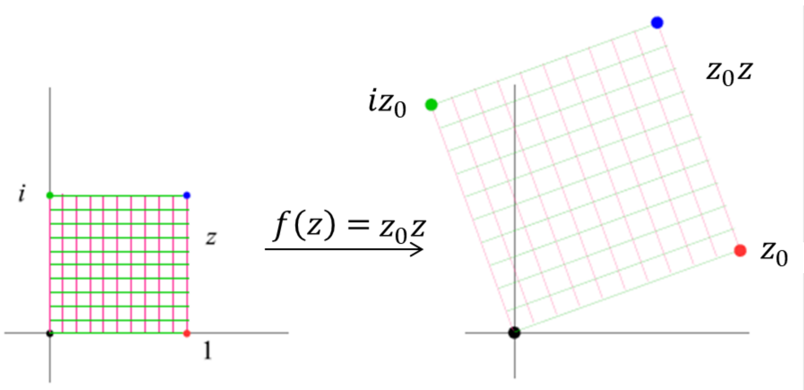
$$z_0 = \cos\ \theta_0 + i \operatorname{sen}\ \theta_0$$

la función $f(z) = z \cdot z_0$ es una rotación con ángulo θ_0. Recordando que una rotación de este tipo (vista como una transformación en $\mathbb{R}^2$) queda representada por la matriz

$$\begin{pmatrix} \cos\ \theta_0 & -\operatorname{sen}\ \theta_0 \\ \operatorname{sen}\ \theta_0 & \cos\ \theta_0 \end{pmatrix}$$

Ahora bien, para el caso general en que $z_0 = r_0(\cos\ \theta_0 + i \operatorname{sen}\ \theta_0)$, la transformación $f(z) = z \cdot z_0$ resulta ser una rotación con ángulo θ_0, seguida de una homotecia con razón de homotecia r_0, lo que viene representado por

$$r \begin{pmatrix} \cos\ \theta_0 & -\operatorname{sen}\ \theta_0 \\ \operatorname{sen}\ \theta_0 & \cos\ \theta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\ \theta_0 & -r\operatorname{sen}\ \theta_0 \\ r\operatorname{sen}\ \theta_0 & r\cos\ \theta_0 \end{pmatrix}$$

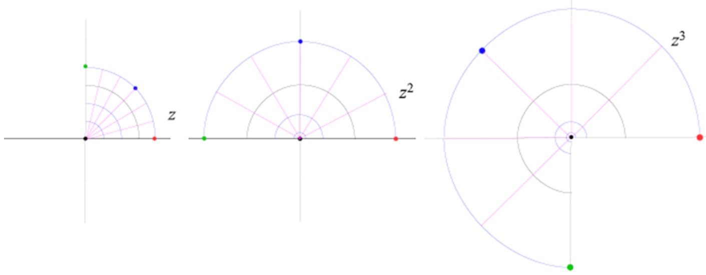


Ejercicio 1.4 Analice la función $w = f(z) = 3z$

Solución *Con $z = x + iy$, obtenemos $w = 3z = 3(x + iy) = 3x + i3y$. Así, $u = 3x$, $v = 3y$, y todo vector no nulo del plano z se alarga en un vector que tiene el mismo argumento, pero tres veces su longitud, en el plano w. Como cualquier punto $a + ib$ del plano w es la imagen del punto $\left(\frac{a}{3}\right) + i\left(\frac{b}{3}\right)$ en el plano z, la función $w = 3z$ es sobre. Además, la función es también uno a uno, ya que $3z_1 = 3z_2$ sólo cuando $z_1 = z_2$*

1.5 Función Potencia

Al elevar un complejo a la potencia entera positiva n su módulo se eleva a la potencia n y su argumento se multiplica por n. Así que z^n manda cada círculo con centro en el origen y radio r al círculo con centro en el origen y radio r^n, y manda cada recta por el origen a otra cuyo ángulo con el eje real es n veces mayor:



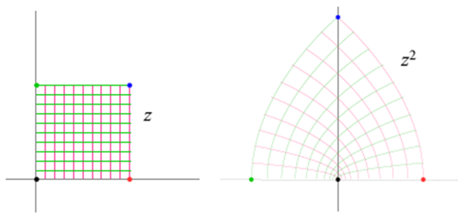
Podemos utilizar la fórmula de De Moivre para dar una interpretación geométrica de las funciones de la forma $z \mapsto z^n$, con $n \in \mathbb{N}$. Empecemos por el caso $n = 2$. Si $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\;\theta)$, entonces

$$z^2 = r^2(\cos\;2\theta + i\,\text{sen}\;2\theta)$$

lo que nos dice que la función $z \mapsto z^2$ estira el argumento de z al doble, y eleva al cuadrado su módulo.
Veamos lo que hace la función $s(z) = z^2$ con las rectas horizontales y verticales:

$$s(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy, \qquad s(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

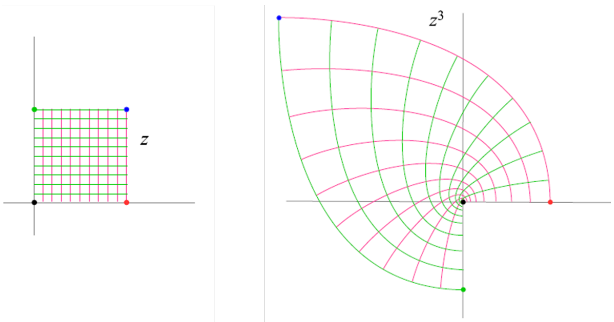
Los puntos de una recta horizontal (t,c) van a los puntos $(t^2 - c^2, 2ct)$, que forman una parábola horizontal que abre a la derecha. Los puntos de una recta vertical (c,t) van a los puntos $(c^2 - t^2, 2ct)$, que forman una parábola horizontal que abre a la izquierda.



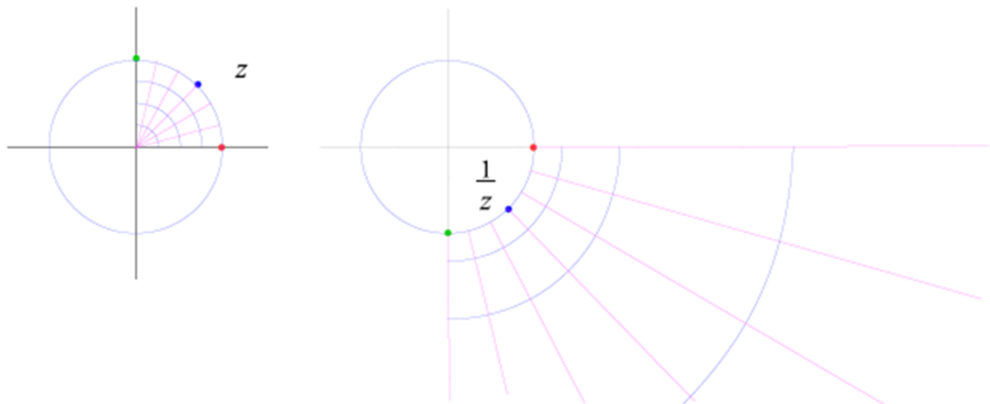
Veamos qué pasa con los puntos del círculo unitario: Esta transformación deja invariante dicho círculo y si recorremos el círculo unitario del dominio una vez en el sentido contrario al de las manecillas, entonces recorreremos dos veces al círculo unitario del contradominio. Algo análogo ocurre con circunferencias de radio r (con centro en el origen): Al recorrerla una vez en el sentido de las manecillas, su imagen cubre dos veces a la circunferencia de radio r^2.
Veamos ahora lo que hace la función $c(z) = z^3$:

$$c(x+iy) = (x+iy)^3 = x^3 + ix^2y - 3xy^2 - iy^3, \quad c(x,y) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)$$

Los puntos de una recta horizontal (t,c) van a los puntos $(t^3 - 3c^2t, 3ct^2 - c^3)$, que forman una curva de grado 3. Los puntos de la recta vertical (c,t) van a los puntos $(c^3 - 3ct^2, 3c^2t - t^3)$, que forman una curva que es igual a la anterior pero reflejada en la linea $y = -x$.



Las funciones z^{-n} pueden verse como composiciones de las funciones z^n con la función $\frac{1}{z}$. La función $\frac{1}{z}$ es una función biyectiva de $\mathbb{C} - \{0\}$ en $\mathbb{C} - \{0\}$ que al aplicarse dos veces da la identidad.
Como $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, el círculo de radio r centrado en el origen va a dar al circulo de radio $\frac{1}{r}$; la región del plano dentro del círculo de radio 1 va a dar a la region afuera del circulo de radio 1, y viceversa; la región del plano arriba del eje real va a dar a la region abajo del eje real, y viceversa. Cada recta por el origen va a la recta reflejada en el eje real.



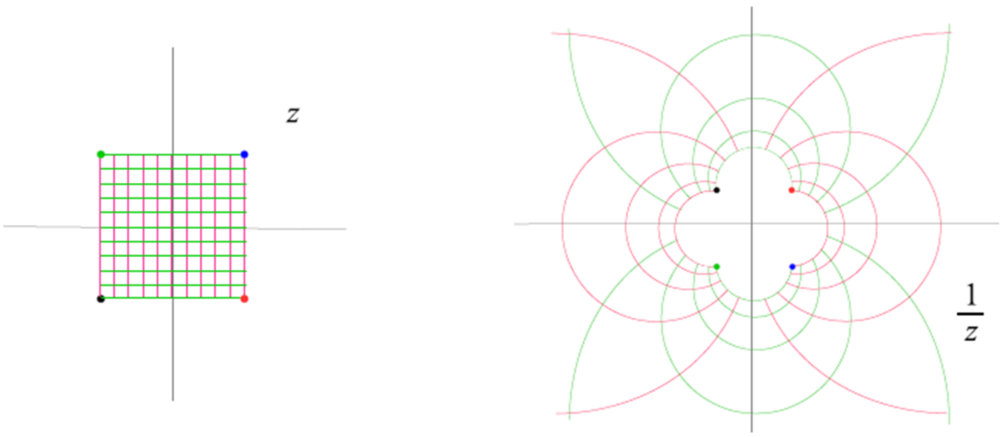
Veamos ahora que hace $r(z) = \frac{1}{z}$ con las rectas del plano.

$$r(x+iy) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \quad o \;\; sea \;\; r(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

Si $x' = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad y' = -\frac{y}{x^2+y^2}$ entonces podemos despejar $x = \frac{x'}{x'^2+y'^2}, \quad y' = -\frac{y'}{x'^2+y'^2}$
Si los puntos (x,y) estan en una recta, satisfacen una ecuación de primer grado $ax+by=c$, reescribiendo la ecuación en terminos de x' y y' obtenemos

$$a\left(\frac{x'}{x'^2+y'^2}\right) + b\left(\frac{-y'}{x'^2+y'^2}\right) = c \quad asi \;\; que \quad ax' - by' = c(x'^2+y'^2)$$

que equivale a $cx'^2 + cy'^2 - ax' + by' = 0$ y esta es la ecuación de un círculo si $c \neq 0$ (es decir, si la recta original no pasa por el origen) o de una recta, si $c = 0$.



1.6 Funciones Polinomiales

Por definición, una función polinomial es aquella que puede escribirse de la forma

$$P(z) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

donde $a_0, ..., a_n \in \mathbb{C}$ y suponemos que $a_n \neq 0$. Cuando esto ocurre, decimos que P es una función polinomial (o simplemente, un polinomio) de grado n. Como es conocido, cualquier polinomio de grado mayor o igual a 1 con coeficientes complejos tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}$, lo que implica a su vez que un polinomio de grado n tiene exactamente n raíces.

1.7 Funciones Racionales

Por definición, una función racional está dada como el cociente de dos polinomios:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

donde estamos suponiendo que P y Q no tienen factores en común. En principio, esta función no está definida en los ceros de Q, pero podemos extender la función al conjunto de los complejos extendidos.

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Suponga que

$$f(z) = \frac{(z-i)(z-1)}{z(z^2+1)}$$

. Diga en qué punto o puntos de cada uno de los siguientes dominios no está definida f(z)

$$|z| < \frac{3}{4}$$
$$|z| < 2$$

$$|z - i| < 2$$

2. Para cada una de las siguientes funciones, el valor de

$$f(1 + 2i)$$

es

$$f(z) = \frac{1}{|z|}$$

$$f(z) = \frac{x - iy}{1 + z}$$