VARIABLE COMPLEJA

Notas del curso Variable Compleja 1

Unidad 2

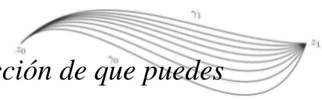
Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Ofelia Cepeda Camargo & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1



La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 2. Funciones de Variable Compleja

1.1 Funciones analíticas

Definición 1.1 (Funciones analíticas)

Sean $A \subset \mathbb{C}$ y $f : A \to \mathbb{C}$ una función.

- *Sea z_0 un punto interior de A. Decimos que f es **analítica** (u **holomorfa**) en z_0 si existe una vecindad (abierta) U de z_0 en A tal que $f'(z)$ existe en cada punto $z \in U$;*
- *Si A es un conjunto abierto, decimos que f es **analítica** en A si f es **analítica** en cada punto de A.*
- *Una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida en todo el plano complejo es **entera** si f es **analítica** en $\mathbb{C}$*

♣

Ejemplo 1.1 La función $f(z) = 3z^2 + 4zi - 5 + i$ es analítica en $z_0 = 2$.
En efecto:

$$f'(z) = 6z + 4i$$
$$f'(2) = 12 + 4i$$

Ejemplo 1.2 En particular, los polinomios con coeficientes complejos son funciones analíticas en todo $\mathbb{C}$: si

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

entonces

$$P'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \cdots + a_1$$

Ejemplo 1.3 Las funciones racionales (cocientes de polinomios) son analíticas en todos los puntos de $\mathbb{C}$ donde el denominador no se anula. Las derivadas de funciones racionales son tambien funciones racionales.

$$Si\ f(z) = z^{-1}\ entonces\ f'(z) = \left(\frac{1}{z}\right)' = \frac{0z^n - nz^{n-1}}{z^{2n}} = -\frac{n}{z^{n+1}} = -nz^{-n-1}$$

Proposición 1.1 (Una función analítica es continua)

Si $f(z)$ es analítica en $A \subset \mathbb{C}$ entonces $f(z)$ es continua en A.

♠

Demostración Tenemos que

$$\lim_{z \to z_0} (f(z) - f(z_0)) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 0 \cdot f'(z_0) = 0$$

■

Teorema 1.1 (Reglas de derivación)

Si las funciones f y g son analíticas en la región $A \subset \mathbb{C}$ entonces las funciones $f + g$ y $f \cdot g$ son analíticas en A. La función $\frac{f}{g}$ es analítca en la región $\{z_0 \in A \mid g(z_0) \neq 0\}$. Les derivadas son

1. $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$
2. $(fg)'(z_0) = f(z_0)g'(z_0) + f'(z_0)g(z_0)$
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}$

♡

Demostración Tenemos que

$$
\begin{aligned}
(1)\ (f+g)'(z_0) &= \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)+g(z)-f(z_0)-g(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} + \lim_{z\to z_0} \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} \\
&= f'(z_0)+g'(z_0) \\
(2)\ (f\cdot g)'(z_0) &= \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)\cdot g(z)-f(z_0)\cdot g(z_0)}{z-z_0} \\
&= \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)\cdot g(z)-f(z_0)\cdot g(z)+f(z_0)\cdot g(z)-f(z_0)g(z_0)}{z-z_0} \\
&= \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\cdot g(z)+f(z_0)\cdot \lim_{z\to z_0} \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} \\
&= f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0)
\end{aligned}
$$

Ahora bien para (3) se tiene

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g}\right)'(z_0) &= \lim_{z\to z_0} \frac{\frac{1}{g(z)}-\frac{1}{g(z_0)}}{z-z_0} \\
&= \lim_{z\to z_0} \frac{\frac{g(z_0)-g(z)}{g(z)g(z_0)}}{z-z_0} \\
&= \lim_{z\to z_0} \frac{1}{g(z_0)g(z)}\cdot\frac{g(z_0)-g(z)}{z-z_0} \\
&= -\frac{1}{g^2(z_0)}g'(z_0)
\end{aligned}
$$

Así

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) &= \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(z_0) \\
&= f'(z_0)\cdot\frac{1}{g(z_0)}-f(z_0)\frac{g'(z_0)}{g^2(z_0)} \\
&= \frac{f'(z_0)g(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}
\end{aligned}
$$

■

Proposición 1.2 (Regla de la cadena)

Si f es analítica en la región A y g es analítica en $f(A)$ entonces $g\circ f$ es analítica en A y

$$(g\circ f)'(z_0)=g'(f(z_0))\cdot f'(z_0)$$

♠

Demostración Tenemos que

$$\lim_{z\to z_0}(g\circ f) = \lim_{z\to z_0}\frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0}\frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{f(z)-f(z_0)}\cdot\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

Como f es analitica en A entonces f es continua en A, asi que

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$$

por lo tanto $\lim_{z\to z_0}\dfrac{g(f(z))-g(f(z_0))}{f(z)-f(z_0)}=g'(f(z_0))$ y ya sabemos que $\lim_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0)$. ■

Ejemplo 1.4 Si $f(z)=z^5$ y $g(z)=z^3+iz-1$ entonces

$$g\circ f(z)=z^{15}+iz^5-1 \quad y \quad (g\circ f)'(z)=15z^4+5iz^4$$

$$f\circ g(z)=(z^3+iz-1)^5 \quad y \quad (f\circ g)'(z)=5(z^3+iz-1)^4\cdot(3z^2+i)$$

No obstante las similitudes entre la derivación para funciones de variables reales y la derivación para funciones de una varible compleja. Hay una diferencia fundamental. Sea $z = (x, y)$, suponga que h es real y entonces

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = f_x(z)$$

Pero entonces si $h = ik$ es puramente imaginario, entonces

$$f'(z) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{ik} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z) = -if_y(z)$$

Así, la existencia de una derivada compleja obliga a la función a satisfacer la ecuación diferencial parcial

$$f_x = -if_y$$

Si $f(z) = u(z) + iv(z)$, donde u y v son funciones reales de una variable compleja, y si igualamos las partes reales y las imaginarias de

$$u_x + iv_y = f_x = -if_y = v_y - iu_y$$

obtenemos las ecuaciones diferenciales de Cauchy-Reimann

$$\boxed{u_x = v_y, \quad v_x = -u_y}$$

Hemos probado la proposión

Proposición 1.3 (Ecuaciones de Cauchy-Riemann)

SSea $f : U \to \mathbb{C}$ analítica en z_0. Si $f = u+iv$, entonces u,v cumplen las ecuaciones de Cuachy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

♠

Ejemplo Sea $f(x+iy) = x^2 - y^2 + 2ixy$. Aquí $u = x^2 - y^2$ y $v = 2xy$ las dos son funciones reales derivables y

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Pruebe lo siguiente: Sean U una región de $\mathbb{C}$ y $f : U \to \mathbb{C}$ analítica tal que la imagen de f está contenida en el eje real. Entonces f es constante.
2. Cierto o falso Si f es analítica, entonces se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Valdrá la afimación recíproca?