Variable Compleja

Notas del curso Variable Compleja 1

Unidad 2

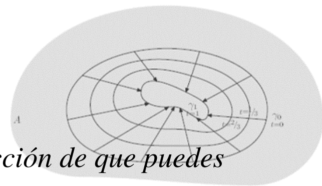
Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Ofelia Cepeda Camargo & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1



La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 3. Integración Compleja

1.1 Más de funciones analíticas

Teorema 1.1 (Fórmula integral de Cauchy)

Sea A una región, γ una curva cerrada C^1 por tramos contenida en A, $f : A \to \mathbb{C}$ una función analítica, $z_0 \in A \setminus \gamma$. Entonces

$$n(\gamma, z_0)f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

♡

Comentario La aplicación más usual de la fórmula de Cauchy ocurre cuando $n(\gamma, z_0) = 1$. Bajo esta hipótesis, tenemos

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

La fórmula integral de Cauchy nos permite obtener otras propiedades importantes de las funciones analíticas.

En esta parte, mostraremos que, para una función analítica en un determinado dominio, todas las derivadas existen y son analíticas. Este resultado conduce a la Fórmula integral de Cauchy para derivadas. A continuación, probaremos el Teorema de Morera , que es inverso al teorema de Cauchy-Goursat. Deberíamos también establecer la desigualdad de Cauchy para las derivadas, que juega un papel importante en la demostración del teorema de Liouville.

Lema 1.1 (Funciones analíticas con derivadas de todos los ordenes)

Sean $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva cerrada, C^1 por partes y φ una función continua en los puntos de γ. La función

$$F_n(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w - z}\, dw, \quad z \notin \gamma$$

posee derivadas analíticas de todos los órdenes y $F_n'(z) = nF_{n+1}(z)$

♡

Demostración La demostración por inducción sobre n. Si $n = 1$, tenemos que

$$F_1(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w - z}\, dw$$

Veamos primero que F_1 es continua. Para $z, z_0 \notin \gamma$ tenemos que

$$\begin{aligned} F_1(z) - F_1(z_0) &= \int_\gamma \varphi(w)\left(\frac{1}{w - z} - \frac{1}{w - z_0}\right)\, dw \\ &= (z - z_0)\int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w - z)(w - z_0)}\, dw \end{aligned}$$

Como z_0 no está en el compacto $\gamma[a, b]$, existe $d = \min_{t\in[a,b]} |\gamma(t) - z_0| > 0$. Además, si $|z - z_0| < \frac{d}{2}$, tenemos que $|\gamma(t) - z| \geq \frac{d}{2}$ para todo $t \in [a, b]$. Como φ es continua en γ, existe M tal que $|\varphi| \leq M$. Juntando información tenemos

$$|F_1(z) - F_1(z_0)| \leq |z - z_0|\, \frac{2M}{d^2}\, long(\gamma)$$

lo que implica que F_1 es continua en z_0. Observemos que además tenemos

$$\frac{F_1(z)-F_1(z_0)}{z-z_0}=\int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w-z)(w-z_0)}\,dw=\int_\gamma \frac{\Phi(w)}{w-z}\,dw,\quad \Phi(w)=\frac{\varphi(w)}{w-z_0}$$

como Φ es continua en los puntos de γ, esta expresión es continua en z_0, de modo que

$$F_1'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{F_1(z)-F_1(z_0)}{z-z_0}=\int_\gamma \frac{\Phi(w)}{w-z_0}\,dw=\int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w-z_0)^2}\,dw=F_2(z_0)$$

Supongamos que hemos mostrado que $F_{n-1}'(z)$ existe y que

$$F_{n-1}'(z)=(n-1)F_n(z)$$

Primero veamos que $F_n(z)$ es continua. Tenemos que

$$\begin{aligned}
F_n(z)-F_n(z_0)&=\int_\gamma\left(\frac{\varphi(w)}{(w-z)^n}-\frac{\varphi(w)}{(w-z_0)^n}\right)dw\\
&=\int_\gamma\left(\frac{\varphi(w)}{(w-z)^n}-\frac{\varphi(w)}{(w-z)^{n-1}(w-z_0)}+\frac{\varphi(w)}{(w-z)^{n-1}(w-z_0)}-\frac{\varphi(w)}{(w-z_0)^n}\right)dw\\
&=(z-z_0)\int_\gamma\frac{\varphi(w)}{(w-z)^n(w-z_0)}\,dw+(G_{n-1}(z)-G_{n-1}(z_0))
\end{aligned}$$

donde

$$G_{n-1}(z)=\int_\gamma\frac{\varphi(w)}{(w-z)^{n-1}(w-z_0)}\,dw=\int_\gamma\frac{\Phi(w)}{(w-z)^{n-1}}\,dw$$

y $\Phi(w)=\dfrac{\varphi(w)}{(w-z_0)}$, como antes. De nuevo, podemos acotar

$$\left|\frac{\varphi(w)}{(w-z)^n(w-z_0)}\,dw\right|\le\frac{2^nM}{d^{n+1}}\,long(\gamma)$$

y usar la hipótesis de inducción para G_{n-1}, obteniendo que F_n es continua en z_0. Además

$$\begin{aligned}
F_n'(z_0)&=\lim_{z\to z_0}\frac{F_n(z)-F_n(z_0)}{z-z_0}\\
&=\lim_{z\to z_0}\int_\gamma\frac{\Phi(w)}{(w-z)^n}\,dw+\lim_{z\to z_0}\frac{G_{n-1}(z)-G_{n-1}(z_0)}{z-z_0}\\
&=\int_\gamma\frac{\Phi(w)}{(w-z_0)^n}\,dw+G_{n-1}'(z_0)\\
&=F_{n+1}(z_0)+(n-1)G_n(z_0)=nF_{n+1}(z_0).
\end{aligned}$$

■

Una consecuencia de este resultado es

Proposición 1.1 (Fórmula integral de Cauchy para derivadas)

Sean $A\subset\mathbb{C}$ un disco abierto, $f:A\to\mathbb{C}$ una función analítica, $z_0\in A$ y γ una curva cerrada C^1 por partes, contenida en A, que no pasa por z_0. Para cada $n\in\mathbb{N}$ existe $f^{(n)}(z_0)$ y está dada por la fórmula integral

$$n(\gamma,z_0)f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

♠

Demostración En el lema anterior, hagamos $\varphi(z)=f(z)$, así para cualquier z_0 que no esté en γ, si

$$F_n(z_0)=\int_\gamma\frac{f(z)}{(z-z_0)^n}\,dz$$

tenemos que F_n es analítica en z_0 y $F_n'(z_0)=nF_{n+1}(z_0)$. Pero para $n=1$, por la fórmula integral de Cauchy tenemos que

$$F_1(z_0) = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i n(\gamma, z_0) f(z_0)$$

Por otro lado,

$$F_{n+1}(z_0) = \frac{F_n'(z_0)}{n} = \frac{F_n''(z_0)}{n(n-1)} = \cdots = \frac{F_{n!}^{(n)}(z_0)}{n} = \frac{2\pi i}{n!} n(\gamma, z_0) f^{(n)}(z_0)$$

de modo que

$$n(\gamma, z_0) f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} F_{n+1}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$$

■

Ejemplo 1.1 Use la fórmula anterior para evaluar la integral $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z+1}{z^4 + 2iz^3}\, dz$

Solución *En este caso el integrando no es analítico en $z = 0$ y en $z = -2i$, pero sólo $z = 0$ está dentro del contorno cerrado. El integrando lo escribimos*

$$\frac{z+1}{z^4 + 2iz^3} = \frac{\frac{z+1}{z+2i}}{z^3}$$

de manera que identificamos $z_0 = 0$, $n = 2$ y $f(z) = \dfrac{z+1}{z+2i}$. La regla del cociente nos da

$$f''(z) = \frac{2 - 4i}{z + 2i}^3$$

y así $f''(0) = \dfrac{2i - 1}{4i}$. Por tanto

$$\int_{|z|=1} \frac{z+1}{z^4 + 2iz^3}\, dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(0) = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} i$$

■

Ejemplo 1.2 Calcular $\displaystyle\int_\gamma \frac{\operatorname{sen}\ 2z}{z^4} dz$, donde γ es el círculo $|z| = 1$ recorrido una vez en sentido antihorario.

Solución *Como $f(z) = \sin\ 3z$ es analítica dentro de γ, con $z_0 = 0$ y $n = 4$, tenemos*

$$\int_\gamma \frac{\operatorname{sen}\ 2z}{z^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} f'''(0) = -9\pi i$$

■

Teorema 1.2

Si $f = u + iv$ es analítica en un dominio S, entonces todas las derivadas parciales de u y v existen y son continuas en S. ♡

Demostración Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica, entonces

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

Ahora sabemos que f' es analítica y, por tanto, continua. Por lo tanto, las ecuaciones anteriores implican que todas las derivadas parciales de primer orden de u y v son continuas. De manera similar, dado que f'' existe y está dada por

$$\begin{aligned} f''(z) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - i \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \\ &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - i \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - i \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{aligned}$$

la continuidad de f” implica que todas las derivadas parciales de segundo orden de u y v son continuas en el punto donde f es analítica. Continuando con este proceso, obtenemos el resultado. ■

Con la proposición del teorema integral de Cauchy para derivadas, podemos obtener dos resultados importantes. El primero es un recíproco del teorema de Cauchy:

Teorema 1.3 (Teorema de Morera)

Sea $f : A \subset \mathbb{C}$ una función continua tal que

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

para toda curva cerrada C^1 por partes contenida en A. Entonces f es analítica en A. ♡

Demostración Sabemos que si $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ para toda curva cerrada γ, entonces existe $F : A \to \mathbb{C}$ analítica tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in A$. Pero por la proposición del teorema integral de Cauchy para derivadas, F tiene derivadas analíticas de todos los órdenes, así que en particular $F''(z) = f'(z)$ existe para todo $z \in A$

Ejemplo 1.3 Considere la función $f(z) = \displaystyle\int_0^1 e^{-z^2}dt$. Sea γ cualquier contorno cerrado simple en el plano complejo. Al cambiar el orden de integración, tenemos

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 \left(\int_\gamma e^{-z^2}dz\right) dt = 0$$

Por tanto, en vista del teorema, la función $f(z) = \dfrac{1-e^{-z^2}}{z^2}$, $z \neq 0$ es analítica. ■

Ejemplo 1.4 Considere la función $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$

- Se satisface que $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ para toda curva cerrada (que no pasa a través del origen), pero no es analítica en $z = 0$. ¿contradice esta afirmación el teorema de Morera?

Solución *No se contradice el teorema de Morera, ya que f no es continua en el interior de curvas que contengan al cero, pues f no esta definida en 0.* ■

Corolario 1.1 (Funciones analíticas en $A \subset \mathbb{C}$)

Sea f continua en una región A y analítica en $A \setminus \{z_0\}$ para algún punto $z_0 \in A$. Entonces f es analítica en A. ♡

Demostración Para mostrar la analiticidad en z_0, consideramos un disco pequeño $D(z_0, \epsilon) \subset A$. Si γ es cualquier curva en el disco, entonces $\displaystyle\int_\gamma f = 0$, por el teorema de Cauchy para un disco. Así, el teorema de Morera implica que f es analítica en este disco. Ya sabemos que es analítica en el resto de A.

Teorema 1.4 (Teorema de Liouville)

Sea f una función entera y acotada. Entonces f es constante. ♡

Demostración Usaremos la fórmula integral de Cauchy para mostrar que $f'(z_0) = 0$ para todo $z_0 \in \mathbb{C}$. En este caso, γ es una circunferencia de radio R suficientemente grande. Entonces $n(\gamma, z_0) = 1$ y

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^2}|dz|$$

como $|f(z)| \leq M$ y la longitud de γ es $2\pi R$,

$$|f'(z_0)| \leq \frac{MR}{R^2} = \frac{M}{R}$$

lo que tiende a cero cuando $R \to \infty$ (aquí es donde usamos que f está definida en todo C), de modo que $f'(z_0) = 0$. ■

Ejemplo 1.5 Considere la función $f(z) = \frac{1}{z^2}$

- La función f está acotada conforme $z \to \infty$, pero no es constante. ¿Contradice esta afirmación el teorema de Liouville?

Solución *No contradice el teorema de Liouville pues la función f no es entera, al no ser analítica en 0.* ■

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Sea la función f entera y $f(z) \to \infty$ cuando $z \to \infty$. Demuestre que f debe tener al menos un cero.