Facultad de Ciencias UNAM

Variable Compleja

Notas del curso Variable Compleja 1

Unidad 2

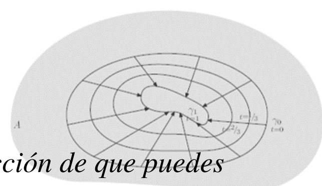
Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Ofelia Cepeda Camargo & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1



La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 3. Integración Compleja

1.1 El teorema de Cauchy versión homotópica

Para extender el teorema de Cauchy-Goursat a regiones más generales que rectángulos, necesitamos demostrar algunos teoremas de deformación, por lo cual, necesitamos introducir el concepto de homotopía, y dar condi ciones que garanticen la independencia de $\int_\gamma$ de las trayectorias que consideramos, por lo cual, trabajaremos dos tipos de problemas, el primero, en el que las curvas tengan los mismos extremos, y en el segundo, consideraremos curvas cerradas. La idea es dar una especie de deformación entre dos curvas.

Homotopía

Definición 1.1 (Curvas homotópicas)

Sea A una región en $\mathbb{C}$, se dice que las curvas continuas $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to A$ son ***homotópicas*** *en A, si existe una transformación continua*

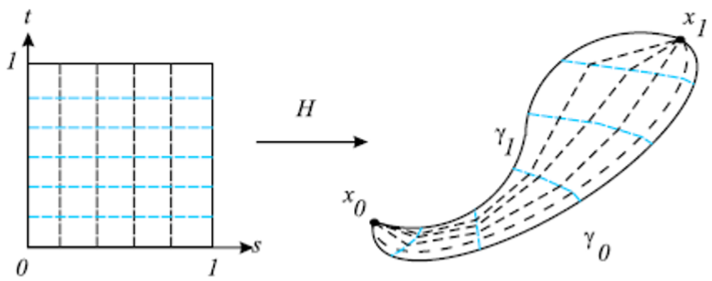
$$H : [a, b] \times [0, 1] \to A$$

con las siguientes propiedades:

- $H(t, 0) = \gamma_0(t)$ *para todo* $t \in [a, b]$
- $H(t, 1) = \gamma_1(t)$ *para todo* $t \in [a, b]$

♣

En este contexto, definimos $\forall\ s \in [0, 1]$ fija, $\gamma_s(t) = H(t, s)$.
La idea de la definición es muy simple, pues cuando s varía de 0 a 1, tenemos una familia de curvas $\{\gamma_s\}$ que se deforman continuamente de γ_0 a γ_1

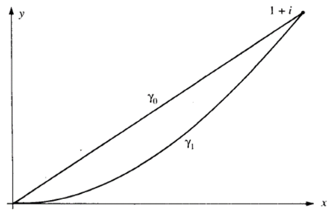


Comentario Puesto que en nuestro contexto estamos integrando usualmente funciones analíticas sobre curvas cerradas, C^1 por partes, tendremos los siguientes requisitos adicionales:

- Si las curvas γ_0 y γ_1 son cerradas, es decir
$$\gamma_0(a) = \gamma_0(b) \quad y \quad \gamma_1(a) = \gamma_1(b)$$
pediremos que las curvas γ_s también lo sean.
- Pediremos que cada γ_s sea C^1 por partes. Una manera de formalizar esto es suponer que existe una partición $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ de $[a, b]$, de modo que cada γ_s sea C^1 en el intervalo (t_{i-1}, t_i) para cada $i = 1, 2, 3, ..., n$. Observemos que cada γ_s es continua en $[a, b]$, pues de inicio pedimos que la homotopía H fuese continua.

Ejemplo 1.1 Si $\gamma_0(t) = t(1+i)$ y $\gamma_1(t) = t + it^2$, entonces γ_0 es homotópica a γ_1, y una posible homotopía está dada por

$$H(s,t) = t + it^{1+s}$$



■

Ejemplo 1.2 Si $\gamma_0(t) = \cos\ t + i \operatorname{sen}\ t$, y $\gamma_1(t) = 2\cos\ t + i \operatorname{sen}\ t$, entonces γ_0 es homotópica, como curva cerrada, a γ_1, y una posible homotopía está dada por

$$H(t,s) = (1+s)\cos\ t + i \operatorname{sen}\ t$$

■

Ejemplo 1.3 Consideremos la circunferencia unitaria $\gamma_0(t) = e^{it}$ y la curva constante $\gamma_1(t) = 0$, $t \in [0, 2\pi]$. Ambas curvas son homotópicas, la función

$$H(t,s) = (1-s)e^{it}$$

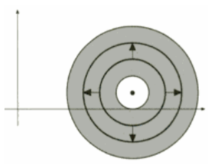
es una homotopía entre ambas curvas, donde cada curva intermedia γ_s es cerrada. ■

En relación con el último ejemplo, en vez de decir 0 es homotópica a una curva constante en A, por lo general abreviaremos la expresión diciendo que la curva es homotópica a un punto en A.

Homotopía y regiones simplemente conexas

Definición 1.2 (Regiones simplemente conexas)

*Se dice que una región A en $\mathbb{C}$ es **simplemente conexa**, si cualquier curva continua y cerrada es homotópica, como curva cerrada, en A a una curva constante, es decir a un punto.* ♣



Comentario A las curvas descritas en la definición anterior que se pueden deformar a un punto, algunas veces se les llama nulhomotópicas.

Ejemplo 1.4 Cualquier disco $D = D(z_0, r)$ es una región simplemente conexa de $\mathbb{C}$.

Sea $\gamma : [a,b] \to D$ una curva cerrada. La función

$$H(t,s) = (1-s)\gamma(t) + sz_0$$

es una homotopía entre γ y z_0, el centro del disco D. ■

Homotopía y el teorema de Cauchy

Teorema 1.1 (Homotopía y el teorema de Cauchy)

Sea A una región de $\mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$ una función analítica en A y $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to A$ dos curvas cerradas, C^1 por partes. Si γ_0, γ_1 son homotópicas en A, entonces

$$\int_{\gamma_0} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz$$

♡

Una demostración completa del teorema requiere conceptos que no se abordan en este curso. Se puede probar un resultado similar con hipótesis adicionales.

Demostración Sea $H : [a, b] \times [0, 1]$ una homotopía entre γ_0 y γ_1. Supondremos que H es C^2 por partes, de modo que las parciales cruzadas de orden 2 sean iguales. Definimos $h : [0, 1] \to \mathbb{C}$ como

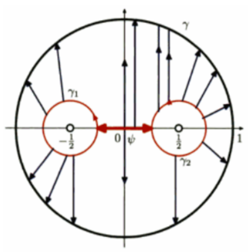
$$h(s) = \int_{\gamma_s} f(z)\, dz = \int_a^b f(H(t, s)) \frac{\partial H}{\partial t}(t, s)\, dt$$

Queremos probar que h es constante en $[0, 1]$. Para esto, mostraremos que su derivada es idénticamente igual a cero.

$$\begin{aligned} h'(s) &= \frac{d}{ds} \int_a^b f(H(t, s)) \frac{\partial H}{\partial t}(t, s)\, dt = \int_a^b \frac{d}{ds} \left(f(H(t, s)) \frac{\partial H}{\partial t}(t, s) \right) dt \\ &= \int_a^b \left(f'(H(t, s)) \frac{\partial H}{\partial s} \frac{\partial H}{\partial t} + f(H(t, s)) \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial t} \right) dt \\ &= \int_a^b \left(f'(H(t, s)) \frac{\partial H}{\partial t} \frac{\partial H}{\partial s} + f(H(t, s)) \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial s} \right) dt \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \left(f(H(t, s)) \frac{\partial H}{\partial s} \right) dt = \left(f(H(t, s)) \frac{\partial H}{\partial s} \right) \Bigg|_a^b = 0 \end{aligned}$$

donde la conclusión se sigue del hecho de que todas las curvas $\gamma_s(t) = H(t, s)$ son cerradas. Por tanto, h es constante y se sigue la afirmación del teorema.

Ejemplo 1.5 Sea γ el círculo unitario $|z| = 1$ y $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - \frac{1}{4}}$. Una manera de calcular $\int_\gamma f$ es obtener una deformación de γ a una nueva curva ψ formada con los círculos de radio $\dfrac{1}{4}$ con centros en $-\dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{1}{2}$ (que denotaremos por γ_1 y γ_2, respectivamente), junto con el intervalo $\left[-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right]$, recorrido en ambos sentidos.



Es claro, a partir de dicha figura, que se puede construir una homotopía de manera explícita, que no pase por los puntos $\pm\dfrac{1}{2}$ (ya que en estos puntos la función no es holomorfa). En un intervalo como $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. La curva ψ se parametriza $\psi(s) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{e^{is}}{4}$, en cambio γ se parametriza $\gamma(s) = \dfrac{1}{2} + ke^{is}$, donde el número k debe cumplir

$$\left| \frac{1}{2} + ke^{is} \right|^2 = 1$$

al resolver esta ecuación se obtiene

$$k = \frac{\sqrt{\cos^2 s + 3} - \cos s}{2}$$

Es claro que este proceso puede continuarse y así obtener la homotopía, la cual se define

$$H(s,t) = t\gamma_s(s) + (1-t)\psi(s), \quad H : [0, 4\pi + 1] \times [0,1] \to \mathbb{C} - \left\{ \pm\frac{1}{2} \right\}$$

esto es, se toma la combinación convexa correspondiente al momento t entre las dos curvas, el número $4\pi + 1$ acontece al tomar las contribuciones de todos los subintervalos. Nótese que de hecho la homotopía no intersecta los interiores de los discos que rodean γ_1 y γ_2. Por consiguiente, es posible aplicar el teorema y obtener

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$$

ya que las contribuciones en el intervalo $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ se cancelan. Ahora,

$$\frac{1}{z^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{z^2 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{z^2 + \frac{1}{2}}$$

y usando el teorema de Cauchy se sigue que

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^2 - \frac{1}{4}} = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^2 - \frac{1}{2}} - \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^2 + \frac{1}{2}} = 0 - 2\pi i$$

un cálculo análogo aplicado ahora a γ_2, muestra que

$$\int_{\gamma_2} f = 2\pi i, \quad \textit{y por ende} \quad \int_\gamma f = 0$$

■

Dos consecuencias de este resultado

Corolario 1.1

Sean A una región de $\mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$ una función analítica en A y $\gamma : [a,b] \to A$ una curva cerrada, C^1 por partes. Si γ es homotópica a un punto en A, entonces

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

♡

Demostración La curva γ es homotópica en A, a una curva constante $\gamma_1(t) = z_0$ para toda t. En consecuencia

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f = 0$$

■

Corolario 1.2

Sean A una región simplemente conexa de $\mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$ una función analítica en A y $\gamma : [a,b] \to A$ una curva cerrada, C^1 por partes. Entonces

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

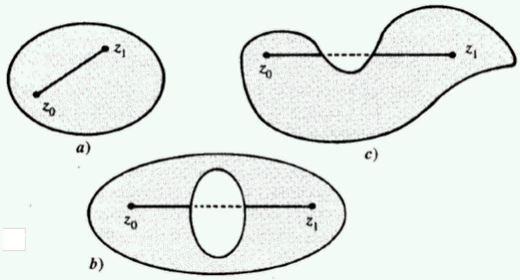
♡

Demostración Cada curva cerrada γ en A es homotópica a un punto en A y, por lo tanto, el resultado se sigue por el teorema de Cauchy. ■

1.1.1 Regiones simplemente conexas y regiones convexas

Definición 1.3

Un conjunto es llamado ***convexo*** *si contiene el segmento de línea recta entre cualquier pareja de sus puntos. Esto es, si z_0 y z_1 están en A, entonces también lo está $tz_1 + (1-t)z_0$, para cualquier número $t \in [0,1]$*



Un conjunto que es convexo (a) y dos que no lo son (b) y (c)

Ejemplo 1.6 Muestre que todo disco es convexo

Solución *Sea D el disco con centro z_0 y radio r, es decir $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$. Para ver que D es convexo, sean $z, w \in D$, entonces se tiene que mostar que*

$$tz + (1-t)w \in D, \quad \forall\, t \in [0,1]$$

Esto es equivalente a demostrar que $|tz + (1-t)w - z_0| < r$. Observe que

$$\begin{aligned} |tz + (1-t)w - z_0| &= |tz + (1-t)w - (t+1-t)z_0| \\ &= |t(z-z_0) + (1-t)(w-z_0)| \\ &\leq |t(z-z_0)| + |(1-t)(w-z_0)| \\ &< tr + (1-t)r = r \end{aligned}$$

donde hemos usado que $z, w \in D$. ■

Proposición 1.1 (Regiones convexas y homotopía)

Si A es una región convexa, entonces cualesquiera dos curvas cerradas en A son homotópicas como curvas cerradas.

Demostración Sean $\gamma_0 : [0,1] \to A$ y $\gamma_1 : [0,1] \to A$ dos curvas y definimos

$$H(t,s) = s\gamma_1(t) + (1-s)\gamma_0(t)$$

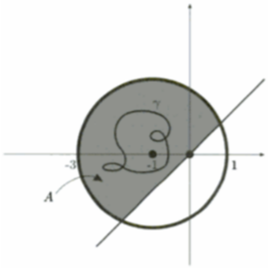
Entonces $H(t,s)$ descansa sobre el segmento de línea recta entre $\gamma_0(t)$ y $\gamma_1(t)$ y, por tanto, está en el conjunto A. Ésta es una función continua, ya que γ_0 y γ_1 son continuas. En $s = 0$ obtenemos $H(t,0) = \gamma_0(t)$, y en $s = 1$ obtenemos $H(t,1) = \gamma_1(t)$. Por tanto, es una homotopía entre γ_0 y γ_1. ■

Corolario 1.3 (Región convexa y región simplemente conexa)

Una región convexa es simplemente conexa

Demostración Sea z_0 cualquier punto en la región convexa A y sea γ cualquier curva cerrada en A. La curva constante en z_0, $\gamma_1(t) = z_0$ para toda t, es ciertamente cerrada y las dos son homotópicas por la proposición anterior. ■

Ejemplo 1.7 Esta versión del teorema de Cauchy nos permite detectar de manera formal que muchas integrales son nulas, por ejemplo, sea A la región que consiste de intersecar el semiplano $\{z \mid Im(z) > Re(z)\}$ con el disco $D(-1,2)$, y γ cualquier curva cerrada de clase C^1 por tramos en A.



Entonces

$$\int_\gamma \frac{z^2+z+1}{z} = 0$$

esto se sigue del teorema de Cauchy, ya que dicha región al ser convexa es simplemente conexa, y la función que se está integrando es holomorfa en A. ■

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Sea $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 4\}$. Demuestre que A no es simplemente conexa. También demuestre que los círculos $|z| = 2$ y $|z| = 3$, son homotópicos en A