Variable compleja

Notas del curso Variable Compleja 1

Unidad 2

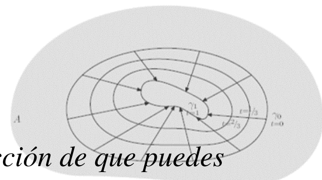
Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Ofelia Cepeda Camargo & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1



La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

1. Unidad 3. Integración Compleja **1**

1.1. Lema de Goursat 1

Capítulo 1 Problemas para pensar 5

Capítulo 1 Unidad 3. Integración Compleja

1.1 Lema de Goursat

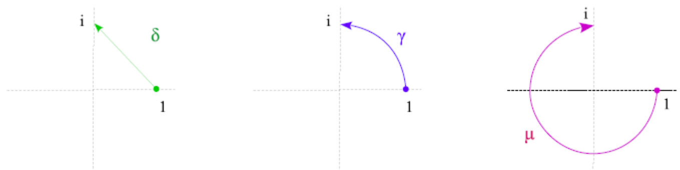
Definición 1.1 (Integral a lo largo de una curva)

Sean $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $f : A \to \mathbb{C}$ una función continua en A y $\gamma : [a,b] \to A$ una curva de clase C^1 en $[a,b]$. La integral de f a lo largo de γ se define como

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$

♣

Ejemplo 1.1 Calcula las integrales de la función $f(z) = z$ a lo largo de estas 3 curvas:



$\delta(t) = 1 - t + ti$ $\quad$ $\gamma(t) = cos(t) + isen(t)$ $\quad$ $\delta(t) = cos(t) - isen(t)$

Solución *En este caso tenemos*

$$\int_\delta z\,dz = \int_0^1 (1-t+it)(-1+i)dt = \int_0^1 -1\,dt + i\int_0^1 (1-2t)dt = -t\Big|_0^1 + i(t-t^2)\Big|_0^1 = -1+0i$$

$$\int_\gamma z\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\,t + i\,\text{sen}\,t)(-\text{sen}\,t + i\cos\,t)\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -2\cos\,t\,\text{sen}\,t\,dt + i\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t - \text{sen}^2\,t\,dt \quad = \cos^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{1}} + i\cos\,t\,\text{sen}\,t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -1+0i$$

$$\int_\mu z\,dz = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (\cos\,t - i\,\text{sen}\,t)(-\text{sen}\,t - i\cos\,t)\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} -2\cos\,t\,\text{sen}\,t\,dt + i\int_0^{\frac{3\pi}{2}} -\cos^2 t + \text{sen}^2\,t\,dt \quad = \cos^2 t\Big|_0^{\frac{3\pi}{1}} - i\cos\,t\,\text{sen}\,t\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}} = -1+0i$$

■

Ejemplo 1.2 Calcula las integrales de la función $f(z) = \dfrac{1}{z}$ a lo largo de $\gamma,\ \mu,\ \delta$

Solución *En este caso*

$$\int_\gamma \frac{1}{z}dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\,t + i\,\text{sen}\,t}(-\text{sen}\,t + i\cos\,t)dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\,t - i\,\text{sen}\,t)(-\text{sen}\,t + i\cos\,t)dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} i\,dt = it\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}i$$

$$\begin{aligned}
\int_\mu \frac{1}{z}dz &= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{\cos\ t - i\,\text{sen}\ t}(-\,\text{sen}\ t - i\cos\ t)dt \\
&= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (\cos\ t + i\,\text{sen}\ t)(-\,\text{sen}\ t - i\cos\ t)dt \\
&= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} -i\ dt = -it\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}} = -\frac{3\pi}{2}i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_\delta \frac{1}{z}dz &= \int_0^1 \frac{1}{1-t+it}(-1+i)dt \\
&= \int_0^1 \frac{1-t-it}{(1-t)^2+t^2}(-1+i)dt \\
&= \int_0^1 \frac{2t-1}{2t^2-2t+1}\ d + i\int_0^1 \frac{1}{2t^2-2t+1}dt = \frac{\pi}{2}i
\end{aligned}$$

■

Al integrar una función compleja sobre distintas curvas con los mismos extremos, el resultado a veces depende de la trayectoria, y a veces no.

Proposición 1.1 (Propiedad de la integral a lo largo de una curva)

Sean $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $f : U \to \mathbb{C}$ una función continua en U y $\gamma : [a,b] \to U$ una curva C^1 en $[a,b]$. Si existe una función analítica $F : U \to \mathbb{C}$ tal que $F'(z) = f(z)$, entonces

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(t))\Big|_a^b = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

En particular, si γ es una curva cerrada, $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0$

♠

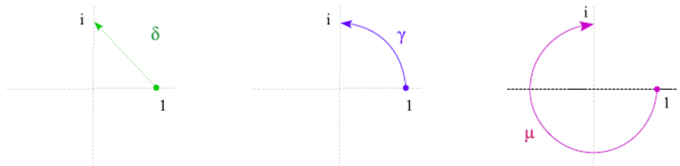
Demostración Usamos el teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b F(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
&= \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))
\end{aligned}$$

■

El teorema fundamental del cálculo vale también para las curvas suaves por pedazos, porque la integral en la curva completa es la suma de las integrales en los pedazos.

Ejemplo 1.3 Calculemos otra vez las integrales de la función z en las curvas $\delta,\ \gamma,\ \mu$



$\delta(t) = 1 - t + ti$ $\quad\gamma(t) = cos(t) + isen(t)$ $\quad\delta(t) = cos(t) - isen(t)$

Solución *Como z es la derivada de* $\dfrac{z^2}{2}$ *en todo* $\mathbb{C}$ *entonces*

$$\int_\delta z\ dz = \int_\gamma z\ dz = \int_\mu z\ dz = \frac{1}{2}z^2\Big|_1^i = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

■

Ejemplo 1.4 Calculemos otra vez las integrales de la función $\frac{1}{z}$ en las curvas $\delta,\ \gamma,\ \mu$

Solución *Como* $\frac{1}{z}$ *es la derivada de* $\log\ z$ *en cada región* $\mathbb{C}-0$ *donde* $\log\ z$ *pueda definirse de manera continua, es decir, en cada rama de* $\log\ z$. *Una rama de* $\log\ z$ *definida en* $\delta,\ \gamma$ *es*

$$\log\ z = \log\ |z| + i\arg\ z,\ \ \textit{con}\ \ -\pi < \arg\ z < \pi$$

entonces

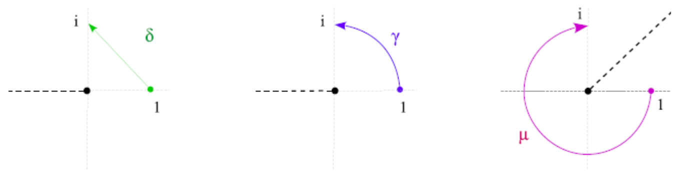
$$\int_\delta \frac{1}{z}\,dz = \int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \log\ z\Big|_1^i = \log\ |i| + i\arg\ i - (\log\ 1 + i\arg\ 1) = 1 + \frac{\pi}{2}i - (0+0i) = \frac{\pi}{2}i$$

Una rama del logaritmo definida en μ *es*

$$\log\ z = \log\ |z| + i\arg\ z,\ \ \textit{con}\ \ -\frac{7\pi}{4} < \arg\ z < \frac{\pi}{4}$$

entonces

$$\int_\mu \frac{1}{z}\,dz = \log\ z\Big|_1^i = \log\ |i| + i\arg\ i - (\log\ 1 + i\arg\ 1) = 1 - \frac{3\pi}{2}i - (0+0i) = -\frac{3\pi}{2}i$$



$-\pi < arg(z) < \pi$ $\qquad$ $-\frac{7\pi}{4} < arg(z) < \frac{\pi}{4}$

El teorema fundamental del cálculo para integrales complejas implica que si F(z) es analítica en una región A y γ *es cualquier curva cerrada en A entonces*

$$\int_\gamma F'(z)dz = 0$$

ya que los valores de F en los extremos de γ*, que son los mismos, se cancelan.* ■

Proposición 1.2

Sean A *una región de* $\mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$ *una función continua en* A *y* $\gamma : [a,b] \to A$ *una curva* C^1 *por partes. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe una función analítica* $F : A \to \mathbb{C}$ *tal que* $F'(z) = f(z)$
2. *Si* γ *es una curva cerrada, entonces* $\int_\gamma f(z)dz = 0$
3. *La integral de f sólo depende de los extremos de la curva; más precisamente, si* $\gamma_1,\ \gamma_2 : [a,b] \to A$ *son curvas tales que* $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ *y* $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$*, entonces* $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$

♠

Demostración Demostraremos que $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$. Para la primera implicación, tenemos:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$
$$= \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$$

Para la segunda implicación,sea γ la curva $\gamma_1 - \gamma_2$, es decir, aquella que primero recorre γ_1 y luego γ_2, ésta en sentido contrario al original. Entonces γ es cerrada y por tanto

$$0 = \int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

Para la tercera y última implicación, usaremos el hecho de que A es abierto y conexo. Sea $z_0 \in A$ fijo y definamos

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$

donde por abuso de notación, la integral de la derecha denota la integral a lo largo de cualquier curva en A que una z_0 con z, pues por hipótesis la integral no depende de la curva. Para mostrar que F es analítica, demostraremos que si $F = u + iv$, entonces u; v son de clase C^1 y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.
Sea $z \in A$ y $r > 0$ suficientemente pequeño, de modo que el disco con centro en z y radio r esté contenido en A. En particular, los puntos z+h y z+ih están en A para todo $h \in \mathbb{R}$ tal que $|h| < r$. entonces

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z) = \lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_{z_0}^{z+h} f(z)\,dz - \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz\right)$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(z)\,dz = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{0}^{h} f(z+t)\,dt$$

donde la integral de z a z + h se toma a lo largo de un segmento horizontal $\gamma(t) = z + t,\ t \in [0, h]$. Ahora aplicamos el teorema del valor medio a las partes real e imaginaria de f, de modo que

$$\frac{1}{h}\int_0^h Re\ f(z+t)\,dt = Re\ f(z+h') \quad y \quad \frac{1}{h}\int_0^h Im\ f(z+t)\,dt = Im\ f(z+h'')$$

con $|h'|,\ |h''| \leq\ |h|$. Cuando $h \to 0$, $h',\ h'' \to 0$ y como f es continua, obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z) = \frac{\partial F}{\partial x}(z) = f(z)$$

lo que implica que $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ son continuas.
De manera análoga, tomando un segmento vertical $\gamma(t) = z + it,\ t \in [0, h]$,

$$\frac{\partial F}{\partial y}(z) = \lim_{h\to 0} \frac{F(z+ih) - F(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{z}^{z+ih} f(z)\,dz$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{0}^{h} f(z+it)\,dt = if(z)$$

Esto dice que $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ son continuas; junto con el análisis anterior, esto dice que u; v son de clase C^1. Además, se satisface

$$\frac{\partial F}{\partial y} = i\frac{\partial F}{\partial y}$$

que es la forma compleja de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, lo cual implica que F es analítica. Finalmente, como F es analítica,

$$F'(z) = \frac{\partial F}{\partial x} = f(z)$$

■

Teorema de Cauchy-Goursat

Decimos que una curva c es cerrada si termina en el mismo punto donde empieza. Decimos que una curva c es simple si no tiene autointersecciones. Uno de los primeros teoremas de topología del plano, descubierto por sus aplicaciones al cálculo complejo, es el siguiente:

Teorema de Jordan Cada curva simple cerrada divide al plano en dos regiones conexas, llamadas el interior y el exterior de c, de las que c es frontera común.

Una curva simple c

El interior de c

El Teorema de Cauchy-Goursat contesta una pregunta fundamental del cálculo complejo:
¿Cuando es cierto que la integral de una función analítica f en una curva cerrada es 0?
Sabemos que esto ocurre si f tiene una antiderivada definida en toda la curva, y que a veces no ocurre, por ejemplo con la integral de $\frac{1}{z}$ a lo largo de un círculo con centro en el origen.

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Sea $f(z) = z^2$ y γ la curva

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) = \pi e^{it} & \text{si } t \in [0, \pi] \\ \gamma_2(t) = t - 2\pi & \text{si } t \in [\pi, 3\pi]. \end{cases}$$

   Calcule $\int_\gamma f(z)dz$